LIVRE DU PROFESSEUR

2de BAC PRO
GROUPEMENT C

MATHS

Georges Bringuier
Éliane Alquier
Laurent Boulanger
André Guitard
Gérald Lafforgue
Jérôme Lasserre
Gilles Léran
Catherine Thiaudière

hachette
TECHNIQUE

© HACHETTE LIVRE 2013, 43 quai de Grenelle 75905 Paris Cedex 15

SOMMAIRE

Statistiques et probabilités

Algèbre – Analyse

Géométrie

1 STATISTIQUES : VOCABULAIRE ET REPRÉSENTATIONS GRAPHIQUES

Capacités	Connaissances
• Organiser des données statistiques en choisissant un mode de représentation adapté à l'aide des fonctions statistiques d'une calculatrice et d'un tableur. • Extraire des informations d'une représentation d'une série statistique.	• Représentation d'une série statistique par un diagramme en secteurs, en bâtons ou par un histogramme.

Le but de ce chapitre est de consolider les acquis du collège. L'enseignement de statistiques à une variable prend ici appui sur des exemples liés aux spécialités de seconde bac pro ou tirés de la vie courante, en utilisant les TIC autant que nécessaire.

Activité 1 : Jours de congés

1. Le diagramme choisi par la secrétaire est un diagramme à bâtons.
Il est particulièrement bien adapté à la situation car le caractère étudié est quantitatif discret.

2. Axe des ordonnées : Effectifs.
Axe des abscisses : Nombre de jours de congés.
Titre : Nombre de jours de congés posés par les employés le mois dernier.

3. Six jours de congés ont été pris en majorité par les salariés de cette société le mois dernier.

4. $21/110 \times 100 = 19{,}09$ %
19,09 % des salariés de l'entreprise ont pris plus de 7 jours de congés le mois dernier.

Activité 2 : Moyens de paiement

1. La population statistique de cette étude est l'ensemble des clients de l'entreprise.

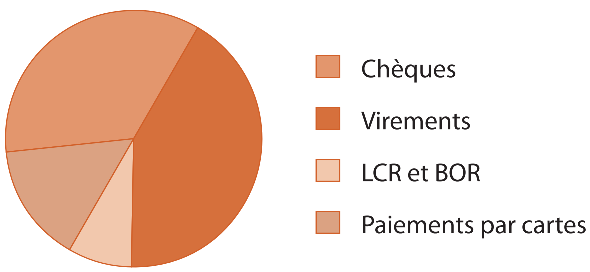
2. Le mode de paiement le plus utilisé en valeur est le virement.

3.

Moyens de paiement	Montants (en k€)	Fréquences (en %)	Mesures des angles (en °)
Chèques	2996	35	126
Virements	3595	**42**	**151**
LCR et BOR	685	**8**	**29**
Paiements par cartes	1284	**15**	**54**
Total	**8 560**	**100**	**360**

4.

Étude des moyens de paiements des clients d'une entreprise



Activité 3 : Retour de marchandise

1. Le montant des achats qui a occasionné le plus de remboursement est [100 ; 150[

2. Le diagramme ne permet pas de connaître le coût exact des articles les plus retournés car les prix sont exprimés en classe d'amplitude 50 €.

3. Pour que l'exploitation eût été plus précise, il eût fallu diminuer l'amplitude des classes.

4. 78 % de produits de plus de 100 € ont fait l'objet d'un remboursement l'année dernière.
$\frac{78}{100} \times 324 \approx 253$: 253 marchandises de plus de 100 € ont été remboursées par le site.

Travaux pratiques

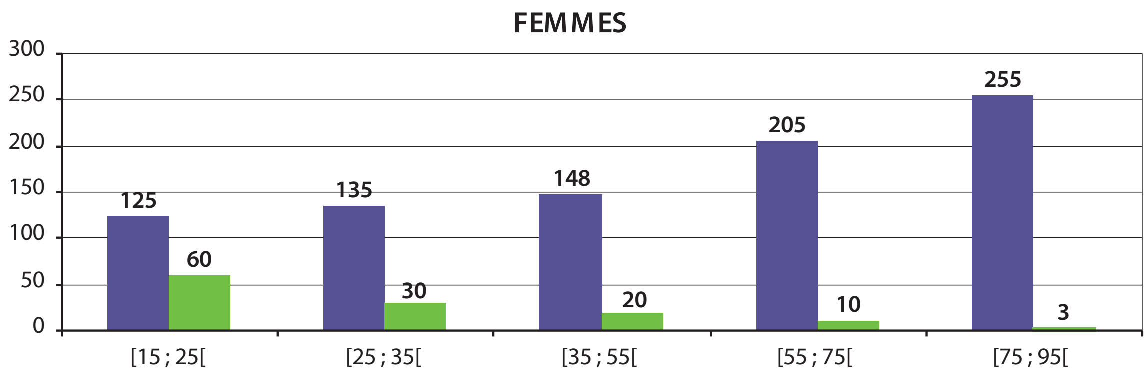
La télévision est-elle menacée par l'ordinateur ?

1. a. 1 000 personnes vivant en France. Il s'agit d'un sondage.

b.

Classe d'âge des hommes (en années)	Temps devant la télévision (en min)	Temps devant l'ordinateur (en min)
[15 ; 25[	120	**100**
[25 ; 35[	**130**	**50**
[35 ; 55[	**155**	**40**
[55 ; 75[	**210**	**25**
[75 ; 95[	**250**	15

c. Représentation graphique des résultats obtenus pour les femmes :



2. a. Les femmes de 75 à 95 ans passent le plus de temps devant la télévision. Les hommes de 15 à 25 ans passent le plus de temps devant l'ordinateur.

b. Les hommes de 15 à 25 ans passent le moins de temps devant la télévision.
Les femmes de 75 à 95 ans passent le moins de temps devant l'ordinateur.

c. Les femmes de la classe d'âge [15 ; 25[passent en moyenne chaque jour 60 minutes devant leur ordinateur.
Les femmes de 75 à 95 ans passent en moyenne chaque jour 3 minutes devant leur ordinateur.

d. On observe dans ce sondage que le temps passé devant la télévision augmente avec l'âge alors que le temps passé devant l'ordinateur diminue avec l'âge.

Les décibels à forte dose vont-ils nous rendre sourds ?

1. a. 900 personnes âgées de 13 à 25 ans vivant en France.

b. Il s'agit d'un sondage.

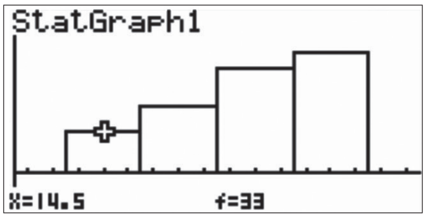
2. a.

Âge (en années)	Centre de classe x_i	Nombre de jeunes ayant ressenti des acouphènes	Fréquence (en %) f_i
[13 ; 16[	14,5	33	**12,64**
[16 ; 19[	17,5	51	**19,54**
[19 ; 22[	20,5	83	**31,80**
[22 ; 25[	23,5	94	**36,02**
TOTAL		**$N = 261$**	100,00

b. 261 jeunes ayant ressenti des acouphènes représentent 29 % des 900 jeunes interrogés dans l'enquête :

$$\frac{261}{900} \times 100 = 29 \text{ soit } 29\ \%.$$

c. Histogramme :



La hauteur des rectangles obtenus est proportionnelle aux effectifs.

3. a. 14 élèves ayant ressenti des acouphènes représentent 8 % des 175 élèves de la classe d'âge [16 ; 19[interrogés dans le lycée professionnel :

$$\frac{14}{175} \times 100 = 8 \text{ soit } 8\ \%.$$

b.

☒ Le pourcentage d'élèves dans la classe d'âge [16 ; 19[qui souffrent d'acouphènes est plus élevé dans l'enquête nationale que dans l'enquête du lycée.

☒ A priori, les élèves du lycée sont plus conscients des risques auditifs que ceux de l'enquête nationale.

☒ Le pourcentage d'élèves de la classe d'âge [16 ; 19[du lycée est inférieur à tous les pourcentages de toutes les classes d'âge de l'enquête nationale.

Exercices

Vocabulaire de la statistique

1 **Enquête 1** : Recensement.
Population : ensemble des immeubles d'un quartier.
Enquête 2 : Recensement.
Population : ensemble des jeunes nés en 1995.
Enquête 3 : Sondage.
Population : ensemble des grains dans l'échantillon de graviers.
Enquête 4 : Sondage. Population : 200 pièces métalliques.

2 **Enquête 1** :
Nombre de fruits consommés quotidiennement. Quantitatif discret.
Enquête 2 :
Montant du chèque. Quantitatif continu.
Enquête 3 :
Nationalité du touriste. Qualitatif.
Enquête 4 :
Cylindrée en cm^3. Quantitatif discret.

3 $N = 2 + 38 + 20 = 60$

Caractère	Effectif	Fréquence en %
Blanc	3	**5**
Rouge	39	**65**
Vert	18	**30**
	$N = 60$	**100**

4 $n_2 = 700 - 350 - 250 = 100$

5 $N = 30$ .Les fréquences sont indiquées dans le tableau ci-dessous.

	A	B	C
1	x_i	n_i	f_i (en %)
2	[5 ; 8[	5	17
3	[8 ;11[	9	30
4	[11 ; 14[	12	40
5	[14 ; 17[	4	13
6	TOTAL	30	100

6 **a.**

Notes	Effectif
[00 ; 05[	2
[05 ; 10[	4
[10 ; 15[	7
[15 ; 20[	5
	$N = 18$

b. Pour le lycée : $\dfrac{23}{112} = 0{,}205$;

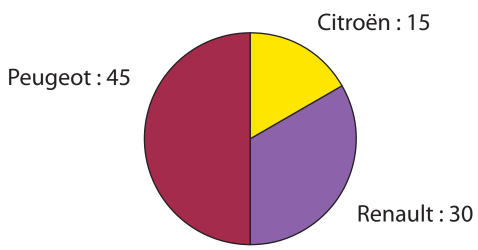
pour la classe : $\dfrac{5}{18} = 0{,}278$.

La proportion d'élèves ayant obtenu entre 15 et 20 au devoir est plus importante pour les élèves de la classe que pour l'ensemble des élèves de seconde Bac Pro du lycée.

Représentations graphiques

7

Marque de voiture sur un parking	Nombre de voitures	Angle (en degrés)
Renault	30	**120**
Peugeot	45	180
Citroën	15	**60**
Total	90	360



La marque la plus représentée est Peugeot.

8

Station de radio	Nombre de jeunes	Fréquences
MRJ	**27**	0,05
Skypop	**243**	0,45
Sun Radio	**216**	**0,4**
Mouv Radio	**54**	0,1
Total	$N = 540$	1

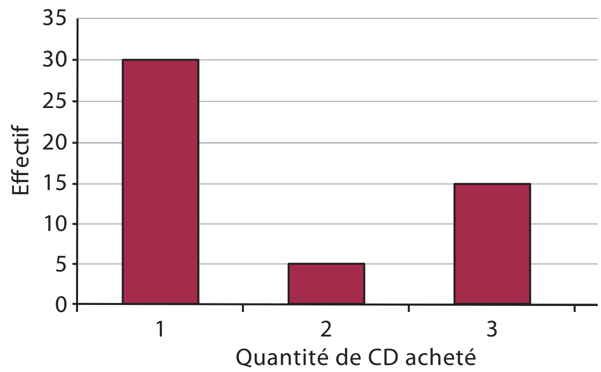
9

Atelier	Nombre d'employés
A	**40**
B	**20**
C	**10**
D	**30**
Total	**100**

Le nombre total d'employés des ateliers A et C est égal à : $40 + 10 = 50$. Ce nombre représente la moitié des employés, soit 50 %.

10

Quantité de CD achetés	Effectif	Fréquence (en %)
1	**30**	60
2	5	10
3	**15**	30
Total	50	100



On achète 1 CD le plus fréquemment.

11 **a.** Amplitude des classes :

$60 - 50 = 50 - 40 = 40 - 30 = 30 - 20 = 10$ minutes.

b. Nombre total de pièces fabriquées :

$N = 45 + 67 + 20 + 10 = 142$.

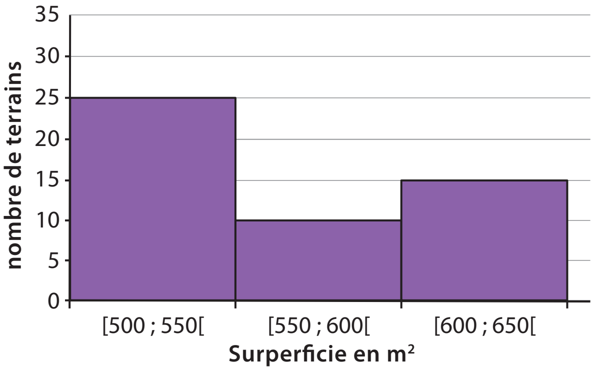
c. 45 pièces sur un total de 142 sont fabriquées en moins de 30 minutes :

$$\frac{45}{142} \times 100 = 31{,}7 \text{ soit } 31{,}7\ \%.$$

Le responsable a raison car au moins 30 % des pièces sont fabriquées en moins de 30 minutes.

12

Superficie des terrains d'un lotissement (en m²)	Nombre de terrains	Fréquence (en %)
[500 ; 550[	25	**50**
[550 ; 600[	10	**20**
[600 ; 650[	15	30
Total	50	100



Les terrains dont la superficie est au moins égale à 600 m^2 ne sont pas les plus nombreux puisqu'ils ne sont que 15. Ce sont les terrains dont la superficie est comprise entre 500 et 550 m^2 qui sont les plus nombreux.

13

Longueur d'une pièce (en cm)	Effectif
[0 ; 10[	**10**
[10 ; 30[	**8**
[30 ; 40[	**7**
Total	**25**

L'amplitude des classes de l'histogramme n'est pas constante.

$$40 - 30 = 10 \ ; \ 30 - 10 = 20 \ ; \ 10 - 0 = 10.$$

L'amplitude de la deuxième classe est supérieure aux deux autres.

14

Tableau 1

Représentations **a** et **c** car le caractère est qualitatif et, dans ce cas, le diagramme en bâtons ou le diagramme en secteurs est adapté.

Tableau 2

Représentations **a** et **c** car le caractère est quantitatif discret et dans ce cas le diagramme en bâtons ou le diagramme en secteurs est adapté.

Tableau 3

Représentations **b** et **c** car le caractère est quantitatif continu et dans ce cas l'histogramme ou le diagramme en secteurs est adapté.

QCM : Testez-vous !

1. A. un recensement : l'enquête porte sur l'ensemble des classements aux Grands Prix et non sur un échantillon.

2. B. 10 : ces observations sont regroupées dans le tableau suivant, avec $N = 10$.

Caractère	Effectif
15	**2**
16	**5**
17	**3**
Total	$N = 10$

3. C. 100 %.

4. A. qualitatif : le caractère n'est pas mesurable.

5. A. qualitatif : le caractère n'est pas mesurable.

6. B. caractère quantitatif discret.

7. C. caractère quantitatif continu : les valeurs du caractère ne sont pas isolées et sont regroupées en classe.

Problèmes

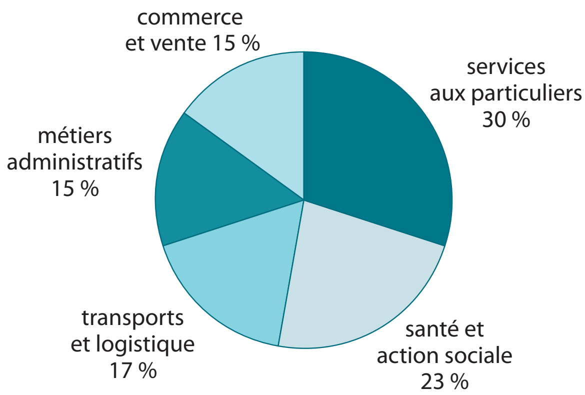
15 Secteurs créateurs d'emplois

1. Caractère : secteur d'activités. Caractère qualitatif.

2.

Secteur d'activités	Effectif (en milliers)	Fréquences (en %)	Mesure de l'angle (en degrés)
services aux particuliers	400	**30**	**109**
santé et action sociale	308	**23**	**84**
transports et logistique	225	**17**	**61**
métiers administratifs	197	**15**	**54**
commerce et vente	194	**15**	**53**
TOTAL	**1324**	**100,00**	**360**

3. Diagramme circulaire :



16 Montant des achats

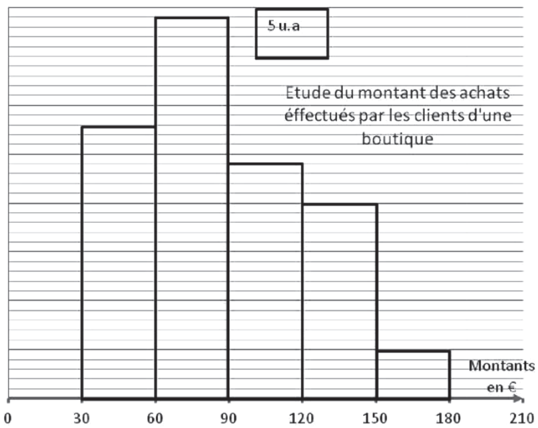
1. La population étudiée est l'ensemble des clients de la journée.

2. a. Le caractère étudié est le montant des achats.

b. C'est un caractère quantitatif continu, les réponses attendues sont des valeurs de l'intervalle [30€ ;180€[

3. a. Pour illustrer cette étude on construit un histogramme.

b.



4. a. Elle a choisi une amplitude de 30€.

b. Ce choix est approprié, pas trop petit ni trop grand pour que l'étude apporte des réponses.

5. 49 achats de plus de 90€ ont été réalisés aujourd'hui.

6. Fréquence = (28+39)*100/116=57,8% des achats ne dépasse pas 90€

17 Le Scrabble

1. a. Effectif correspondant à chaque lettre.

Lettre	E	A	S
Effectif	4347577	2141792,1	2014304,48

Lettre	I	T	N
Effectif	1861319,33	1784826,75	1759329,23

Lettre	R	U	O
Effectif	1682836,65	1657339,13	1402363,88

Lettre	L	D	C
Effectif	1376866,35	917910,9	790423,275

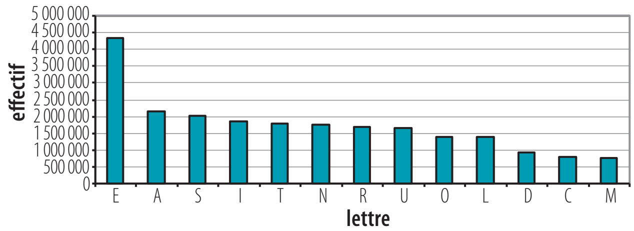
Lettre	M	P	V
Effectif	764925,75	688433,175	458955,45

Lettre	Q	F	G
Effectif	356965,35	254975,25	229477,725

Lettre	H	B	J
Effectif	229477,725	229477,725	152985,15

Lettre	X	Y	Z
Effectif	101990,1	50995,05	50995,05

b. Diagramme en bâtons correspondant aux 13 premières lettres.



2. a. Fréquence correspondant à chaque lettre du jeu de Scrabble :

Lettre	E	A	S	I	T	N	R	U	O	L	D	C	M
Frequence (en %)	15	9	6	8	6	6	6	6	6	5	3	2	3

Lettre	P	V	Q	F	G	H	B	J	X	Y	Z	K	W
Frequence (en %)	2	2	1	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1

b. Les fréquences d'apparition des lettres dans les romans étudiés sont peu différentes de celles du Scrabble. Les deux jokers augmentent les chances de réussir.

18 Montant des réparations

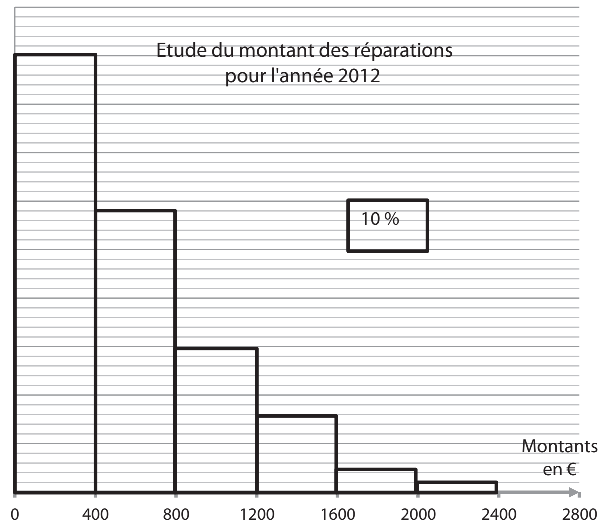
1. La population est l'ensemble des véhicules réparés.

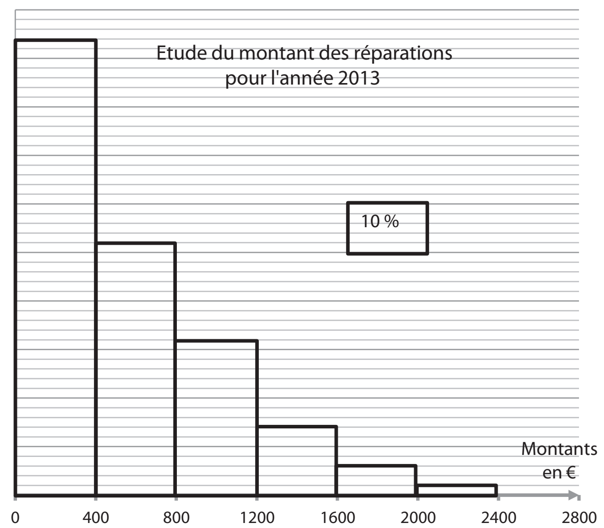
2. Le caractère est le montant des réparations, caractère quantitatif continu

3.

Classe des montants de la réparation en €	Nombre de clients en 2012	Fréquences 2012	Nombre de clients en 2013	Fréquences 2013
] 0 ; 400]	1427	45	1522	47
] 400 ; 800]	934	29	832	26
] 800 ; 1200]	460	15	519	16
] 1200 ; 1600]	246	8	226	7

Classe des montants de la réparation en €	Nombre de clients en 2012	Fréquences 2012	Nombre de clients en 2013	Fréquences 2013
] 1600 ; 2000]	68	2	96	3
] 2000 ; 2400]	19	1	32	1
	3154	100	3227	100





5. Légère augmentation des petites réparations
Stabilisation des grosses dépenses

19 Contrats de travail en France

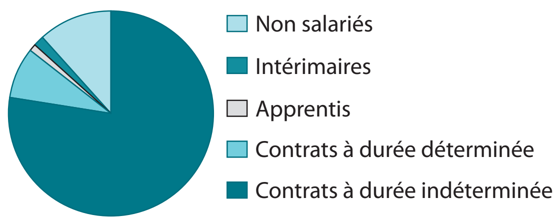
1. En 2003 : 54,5% des 15-24 ans ont un CDI
En 2011 ils sont 47,5%
Une baisse de 7% des CDI pour cette catégorie d'âge en 8 ans.

2. En 2003 : 81,35% des 25-49 ans ont un CDI.
En 2011 ils sont 79,6%.
La baisse est légère pour cette catégorie d'âge.

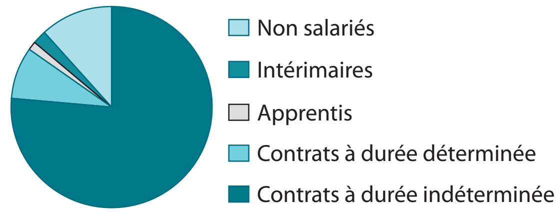
3. En 2003 77,6% des actifs sont en CDI contre 76,4% en 2011.
Baisse de 1,2% en 8 ans.

4. a.

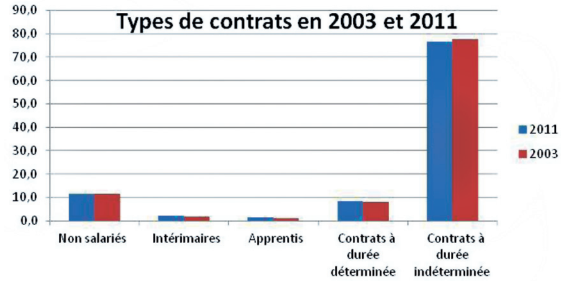
Type de contrats de travail pour les actifs en 2003



Type de contrats de travail pour les actifs en 2011

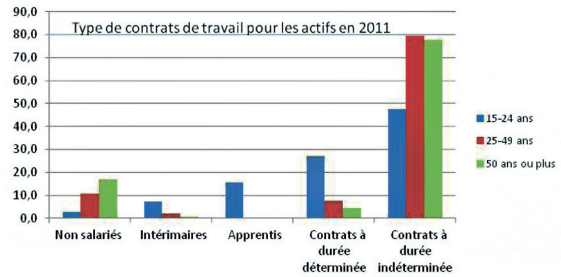


Ou



b. Légère baisse des CDI en 2011, mais la répartition reste sensiblement la même.

5. a.



b. Les 15-24 ans sont sous représentés dans les catégories CDI et non salariés et surreprésentés dans les catégories CDD, apprentis, intérimaires

20 Moyens de paiement en France

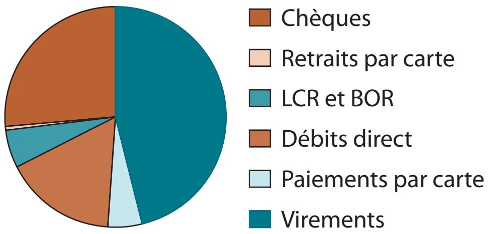
1. La population : les paiements en France

2. a. Le virement est le moyen de paiement le plus utilisé en 2011 en valeur.
b. Le paiement par carte, le débit direct sont de plus en plus utilisés.
c. Le chèque est de moins en moins utilisé.

3. Fréquences = 5478/20907*100 = 26,2% des montants sont payés par chèques.

4.

Répartition des moyens de paiement en France en 2011



Démarche d'investigation

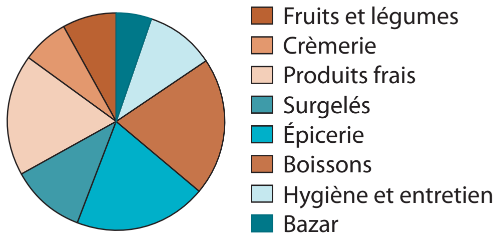
21 Vente d'alcool en France

1. Baisse des ventes de vins, légère baisse des ventes de bières, les spiritueux se maintiennent.

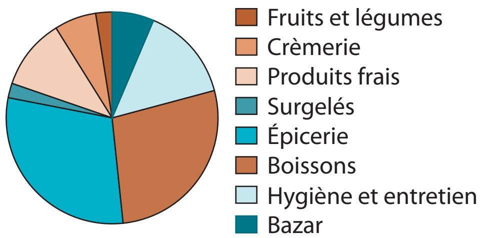
2. Incidences : baisse des ventes en général, réorganisation du rayonnage, baisse des stocks.

22 Comportement des acheteurs au *drive*

Répartition du CA au magasin



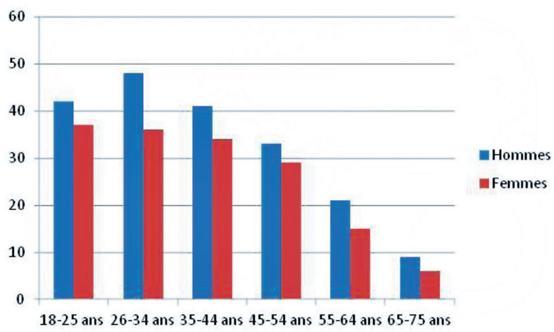
Répartition du CA au *drive*



Utilisation du drive essentiellement pour l'épicerie, les boissons et peu pour les surgelés, les fruits et légumes. La répartition est différente entre le CA du magasin et celui du *drive*.

Incidence sur l'organisation des employés dans le magasin, des zones de stockage.

23 Les fumeurs en France

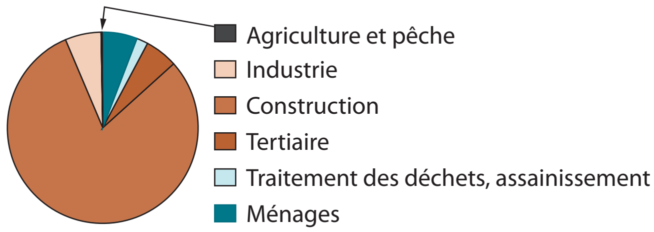


À noter :

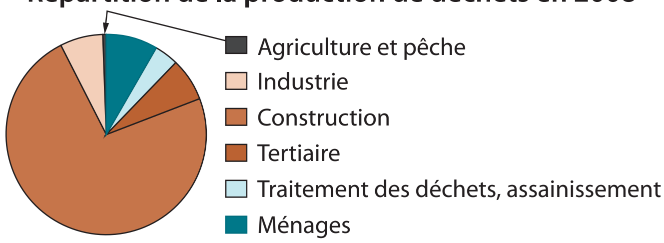
- le taux le plus important : 26-34 ans chez les hommes, 18-25 ans chez les femmes.
- Chez les femmes le taux est sensiblement le même de 18 à 44 ans.
- Les hommes fument plus que les femmes dans chaque catégorie d'âge.
- Le taux diminue avec l'âge.

24 Production de déchets

Répartition de la production de déchets en 2006



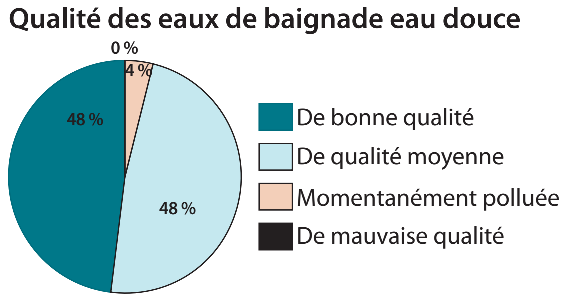
Répartition de la production de déchets en 2008

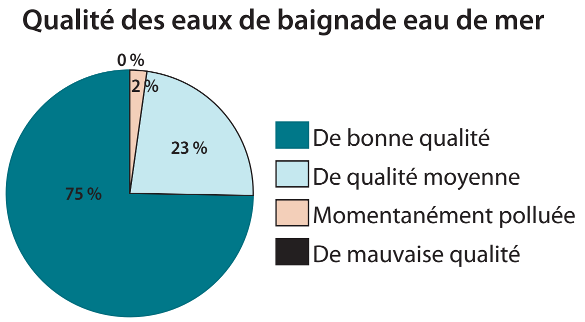


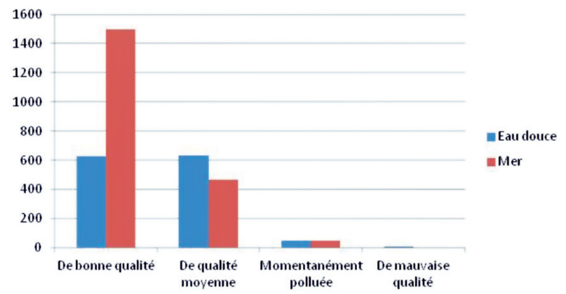
À noter :

- La part construction diminue mais reste la plus importante.
- La part Agriculture et pêche est très faible.
- La part des ménages augmente.

25 Qualité des eaux de baignade







De très bonnes eaux de baignades en général en 2010, plus particulièrement les eaux de mer.

Très peu d'eau de baignade de très mauvaise qualité.

2 INDICATEURS STATISTIQUES

Capacités	Connaissances
• Pour une série statistique donnée, comparer les indicateurs de tendance centrale obtenus à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur. Interpréter les résultats. • Comparer deux séries statistiques à l'aide d'indicateurs de tendance centrale et de dispersion.	• Indicateurs de tendance centrale : moyenne et médiane. • Indicateurs de dispersion : étendue, quartiles.

Le but de ce chapitre est là aussi de consolider les acquis du collège. L'enseignement prend toujours appui sur des exemples concrets liés aux spécialités de seconde bac pro ou tirés de la vie courante. L'utilisation des TIC est nécessaire et le calcul d'indicateurs à l'aide de logiciels informatiques est une obligation de formation.

ACTIVITE 1 : Distribution de primes

1. Il faut calculer la médiane des nombres de ventes : *Me* = 784 (28^e) (ou 793 (29^e))

2. Il faut diviser l'effectif total de 56 agents en 4 effectifs de 14 commerciaux :
14^e nombre de ventes = 532 : 1ère prime pour les 14 agents ayant moins de 532 ventes ;
28^e nombre de ventes = 784 : 2^e prime pour les 14 agents ayant entre 532 et 784 ventes ;
42^e nombre de ventes = 1107 : 3^e prime pour les 14 agents ayant entre 784 et 1107 ventes ;
4^e prime pour les 14 agents ayant plus de 1107 ventes.

ACTIVITE 2 : Vérification d'un prix de vente

1. Moyenne = 163 €

2. *Me* = 169 € 50 % des prix inférieurs à 169 € et 50% supérieur.

3. Q_1 = 149 € Au moins un quart des prix sont inférieurs à 149 €.

4. Q_3 = 179 € Au moins trois quarts des prix sont inférieurs à 179 €.

5. Intervalle [135 ;165]. 13 enseignes sont hors de cet intervalle soit $\frac{13}{25}\times 100 = 52$ %

ACTIVITE 3 : Salaire moyen

1. 89 employés ont un salaire inférieur à 1600 €

2. Moyenne = $(1150 \times 37 + \cdots + 2050 \times 19)/132 = 198900/132 = 1506{,}82$€

3. Si on utilise comme indicateur la moyenne il a raison, mais est-ce suffisant pour conclure définitivement ?

Travaux pratiques

Explications pour un écart de ventes

1. Fichier tableur EXCEL.

2. $\overline{x}_S = 44{,}45$ €
$Me_S = 50{,}40$ €

3. $\overline{x}_O = 44{,}36$ €
$Me_O := 43{,}40$ €

4. Les moyennes des prix sont quasiment identiques dans les deux boutiques.
C'est la médiane qui permet de révéler la différence de ventes entre les boutiques car $Me_O \ll Me_S$.
Il y a plus de bas prix pratiqués dans le magasin OCEAN pour les mêmes modèles ce qui explique les moins bonnes ventes dans l'autre boutique.

Réorganisation d'un rayon

1.

Semaine 22						
Indicateurs statistiques	x_{min}	Q_1	$\overline{x}$	Me	Q_3	x_{max}
Prix TTC en €	**0,67**	**1,95**	**2,62**	**2,88**	**3,26**	**6,33**

2.

Semaine 23						
Indicateurs statistiques	x_{min}	Q_1	$\overline{x}$	Me	Q_3	x_{max}
Prix TTC en €	**0,67**	**1,95**	**2,84**	**2,93**	**3,48**	**6,33**

4. La moyenne, la médiane et Q_3 ont augmenté. La réorganisation du rayonnage a répondu aux attentes de la direction.

Exercices

Indicateurs de tendance centrale : moyenne et médiane

1 **a.** $Me = 8$, valeur centrale de cette série déjà ordonnée.
b. Série ordonnée : 10^{-1} ; 0,6 ; 3 ; 5 ; 5 ; 9 ; 10^2.
$Me = 5$.
c. Série ordonnée : – 11 ; – 8 ; – 4 ; $\frac{1}{5}$; 0 ; 3.
$Me = \frac{-4+0{,}2}{2} = -1{,}9$.

2 **a.** $N = 25 + 20 + 30 + 5 = 80$.
$\frac{N}{2} = 40$. La médiane est la 40e valeur du caractère de la série soit : Me = 2.

b. $N = 6 + 10 + 4 + 80 = 100$.
$\frac{N}{2} = 50$. La médiane est la 50e valeur du caractère de la série, la médiane appartient à l'intervalle [30 ; 40[.
La classe médiane est [30 ; 40[.

3 **a.** $\overline{x} = \frac{1+3+5+7+9+11+13+15+17+19+21}{11}$
$= \frac{121}{11} = 11$
b. $\overline{x} = \frac{-6+12-3+0+14+11+50-35+24+12+9}{11}$
$= \frac{88}{11} = 8$

4 **a.** $\overline{x} = \dfrac{5\times20+6\times42+7\times26+8\times12}{100}$

$= \dfrac{630}{100} = 6{,}3$

b. $\overline{x} = \dfrac{2{,}5\times4+7{,}5\times16+12{,}5\times12+17{,}5\times8}{40}$

$= \dfrac{420}{40} = 10{,}5$

5 **a.** $Me = 10$ et $\overline{x} = 10$.

b. $Me = 10$ et $\overline{x} = 10$.

c. $Me = 10$ et $\overline{x} = 10$.

d. $Me = 10$ et $\overline{x} = 10$.

6 **a.** $\overline{x} = 12$ et $Me = 12$.

b. $\overline{x} = 10$ et $Me = 10$.

c. $\overline{x} = 6$ et $Me = 6$.

d. Impossible sans calcul.

7 **a.** =SOMME(**A1:A10**) : somme de l'ensemble des valeurs de A1 à A10.

b. =MEDIANE(**A1:A100**) : médiane de l'ensemble des valeurs de A1 à A10.

c. =MOYENNE(**A1:Z1**) : moyenne de l'ensemble des valeurs de A1 à Z1.

Indicateurs de dispersion : étendue et quartiles

8 **a.** $e = 19 - 5 = 7$

b. $e = 0{,}1 - 0{,}000\,9 = 0{,}0991$

c. $e = 0{,}9 - (-4) = 4{,}9$

9 **a.** $e = 12 - 3 = 9$

b. $e = 8 - 0 = 8$

10 **a.** Série ordonnée : 1 ; 3 ; 4 ; 7 ; 8 ; 10 ; 12 ; 16.
$N = 8$.
$25\,\% \times 8 = 2$ donc la 2^e^ valeur de la série est $Q_1 = 3$.
$75\,\% \times 8 = 6$ donc la 6^e^ valeur de la série est $Q_3 = 10$.
$Me = \dfrac{7+8}{2} = 7{,}5$.

b. Série ordonnée : 2 ; 4 ; 9 ; 11 ; 13 ; 20 ; 24 ; 31.
$N = 8$.
$25\,\% \times 8 = 2$ donc la 2^e^ valeur de la série est $Q_1 = 4$.
$75\,\% \times 8 = 6$ donc la 6^e^ valeur de la série est $Q_3 = 20$.
$Me = \dfrac{11+13}{2} = 12$.

c. Série ordonnée : 0 ; 4 ; 8 ; 15 ; 20 ; 31 ; 45 ; 54 ; 57 ; 62.
$N = 10$.
$25\,\% \times 10 = 2{,}5$ donc la 3^e^ valeur de la série est $Q_1 = 8$.
$75\,\% \times 10 = 7{,}5$ donc la 8^e^ valeur de la série est $Q_3 = 54$.
$Me = \dfrac{20+31}{2} = 25{,}5$.

d. Série ordonnée : 0 ; 0,4 ; 16 ; 28 ; 44 ; 54 ; 61 ; 180 ; 407 ; 1 000.
$N = 10$.
$25\,\% \times 10 = 2{,}5$ donc la 3^e^ valeur de la série est $Q_1 = 16$.
$75\,\% \times 10 = 7{,}5$ donc la 8^e^ valeur de la série est $Q_3 = 180$.
$Me = \dfrac{44+54}{2} = 49$.

11 **a.** $N = 100$.
$25\,\% \times 100 = 25$ donc la 25^e^ valeur de la série est $Q_1 = 7$.
$75\,\% \times 100 = 75$ donc la 75^e^ valeur de la série est $Q_3 = 13$.
$\dfrac{N}{2} = \dfrac{100}{2} = 50$. La 50^e^ valeur de la série est $Me = 9$.

b. $N = 50$.
$25\,\% \times 50 = 12{,}5$ donc la 13^e^ valeur de la série est $Q_1 = 1$.
$75\,\% \times 50 = 37{,}5$ donc la 38^e^ valeur de la série est $Q_3 = 4$.
$\dfrac{N}{2} = \dfrac{50}{2} = 25$. La 25^e^ valeur de la série est $Me = 3$.

12 **a.** Étendue : $e = 20 - 4 = 16$.

b. Étendue : $e = 14 - 2 = 12$.

13 **a.** $N = 110$.
$25\,\% \times 110 = 27{,}5$ donc la 28^e^ valeur de la série est $Q_1 = 4$.
$75\,\% \times 110 = 82{,}5$ donc la 83^e^ valeur de la série est $Q_3 = 10$.
$\dfrac{N}{2} = \dfrac{110}{2} = 55$. La 55^e^ valeur de la série est $Me = 8$.

b. $N = 100$.
$25\,\% \times 100 = 25$ soit la 25^e^ valeur de la série est $Q_1 = 6$.
$75\,\% \times 100 = 75$ soit la 75^e^ valeur de la série est $Q_3 = 12$.
$\dfrac{N}{2} = \dfrac{100}{2} = 50$. La 50^e^ valeur de la série est $Me = 8$.

14 Signification des formules suivantes, saisies dans une cellule d'un tableur informatique :

a. =MAX(**A1:A1000**) : valeur maximale de l'ensemble des valeurs de A1 à A1000 ;

b. =QUARTILE(**B1:B100**;1) : 1^er^ quartile Q_1 des valeurs de B1 à B100 ;

c. =NB.SI(**A1:C10000**;">5") : parmi les valeurs des cellules de A1 à C10000, nombre de cellules dans lesquelles la valeur est supérieure à 5.

15 **a.** Valeurs des cellules de A1 à A1000 qui appartiennent à l'intervalle [100 ; 200[:

=NB.SI(**A1:A1000**;"<200")-NB.SI(**A1:A1000**;"<100")

b. Troisième quartile des valeurs saisies dans les cellules de A1 à A100 :

=QUARTILE(**A1:A100**;3)

Comparer avec des indicateurs statistiques

16 Séries qui ont la même médiane ou la même moyenne.

Série 1 : 4 ; 4 ; 5 ; 5 ; 5 ; 6 ; 6

$Me = 5$ et Moyenne : 5.

Série 2 : 4 ; 4 ; 5 ; 5 ; 5 ; 6 ; 19

$Me = 5$ et Moyenne : 6,86.

Série 3 : 3 ; 4 ; 5 ; 5 ; 5 ; 6 ; 7.

$Me = 5$ et Moyenne : 5.

Les trois séries ont la même médiane 5, et les séries 1 et 3 ont la même moyenne 5.

17 **a.** Mieux vaut connaître la médiane des revenus pour savoir si la richesse est bien répartie dans un pays.

b. Mieux vaut connaître la moyenne des revenus pour savoir si un pays est riche.

18 Il vaut mieux connaître la moyenne.

19 Moyenne $\overline{x} = 17$ et médiane $Me = 20$.

La moyenne est inférieure à la médiane. La médiane montre que 50 % des notes sont égales à 20.

20 Les deux séries de 72 notes ont toutes les deux une distribution symétrique. On réunit dans un tableau l'ensemble des indicateurs statistiques.

	x_{min}	x_{max}	Étendue e	Moyenne $\overline{x}$
Série A	2	14	14 – 2 = 8	8
Série B	1	19	19 – 1 = 18	10

(suite)	Médiane Me	1er quartile Q_1	3e quartile Q_3
Série A	8	6	10
Série B	10	6	14

Dans les deux séries $Q_1 = 6$. Au moins 25 % des notes sont inférieures ou égales à 6.

Dans la série B, l'étendue, la médiane, la moyenne et le 3e quartile sont supérieurs à ceux de la série A. Les notes de la série B sont donc plus dispersées autour de la médiane et les résultats sont supérieurs à ceux de la série A.

21 Les indicateurs permettant de répondre aux questions sont :

a. la moyenne la plus grande ;

b. l'étendue ;

c. la médiane et les quartiles les plus grands ;

d. la médiane.

QCM : Testez-vous !

1. A. 5 : c'est la valeur centrale de la série.

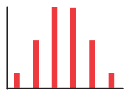
2. B. 5,5 : la série est paire donc la médiane est : $Me = \dfrac{5+6}{2} = 5{,}5$.

3. B. 10 : la moyenne $\overline{x} = \dfrac{8+12+9+11}{4} = 10$.

4. A. une estimation de la moyenne.

5.A. $\overline{x} = $ Me.

6. B.



7. B. 9 990 : l'étendue est : $e = 10\,000 - 10 = 9\,990$.

8. C. ont la même unité.

9. B. au moins 25 % de la population.

10. C. 2 : 25 % × 8 = 2 donc la 2e valeur de la série est $Q_1 = 2$.

11. C. l'étendue.

12. B. =MOYENNE(**A1:A9**).

13. B. 50 % des valeurs sont inférieures à 10.

14. B. la Série B est plus dispersée que la A.

15. B. peuvent être différents.

Problèmes

22 La CARSAT

1. **Hôpital 1**

Indicateurs statistiques	x_{min}	Q_1	$\bar{x}$	Me	Q_3	x_{max}
Age	8	44	59,35	66	74	91

Étendue = e = 91 – 8 = 83 ans

2. **Hôpital 2**

Indicateurs statistiques	x_{min}	Q_1	$\bar{x}$	Me	Q_3	x_{max}
Age	15	44	55,2	55	70	88

Étendue = e = 88 – 15 = 73 ans

4. Moyenne, médiane, troisième quartile et étendue plus grande dans le cas de l'hôpital 1.

L'hôpital 1 a les patients les plus âgés.

5. L'hôpital 1 a donc surement les durées de séjours les plus importantes.

23 Prix d'un pantalon

1.

Indicateurs statistiques	Q_1	$\bar{x}$	Me	Q_3
Prix en €	28	31,675	30	34

2. 26 pantalons dont le prix est compris entre 28 € et 34 € soit 26/40*100= 65 %

24 Les remboursements d'une mutuelle

1. $\bar{x}$ = (10 × 128+…….+175 × 59)/415 = 28930/415 = 69,71 €

2. La classe médiane : [50 ;75[

25 Un enseignant bien ennuyé

1. Thomas : $\bar{x} = 12$ $Me = 12$
Djamila : $\bar{x} = 12$ $Me = 12$

2. Même moyenne, même médiane.

3. Il peut calculer l'étendue, où les premier et troisième quartiles.

26 Salaire moyen ou salaire médian

1. a. An dernier : somme des salaires = 93 942,92 € soit une moyenne de 1 917,20 €

Année en cours : somme des salaires = 93973,04 € soit une moyenne de 1 917,82 €

b. La stabilité de la moyenne ne prouve pas que la répartition des salaires soit restée semblable.

2. a. An dernier : Me = 1 958,27 € ; Année en cours : Me = 1 838,16 €

b. Le salaire médian a diminué d'une année sur l'autre : perte de plus de 120 € !

c. La répartition des salaires a été très largement modifiée avec plus de salaires de faibles montants.

27 Préparations au permis de conduire

1. **Sans conduite accompagnée**

Indicateurs statistiques	Q_1	$\bar{x}$	Me	Q_3	*étendue*
Nombre de présentations	2	2,65	2,5	3	4

Avec conduite accompagnée

Indicateurs statistiques	Q_1	$\bar{x}$	Me	Q_3	*étendue*
Nombre de présentations	1	1,76	2	2	3

2. Nous pouvons remarquer que tous les indicateurs sont plus petits dans le cas de l'étude avec conduite accompagnée. Elle a bien un effet bénéfique pour les candidats au permis de conduire. Ils ont leur permis plus facilement quand ils ont eu la conduite accompagnée.

28 Comparaison de populations

1. **Population allemande**

a. La pyramide des âges est constituée de deux histogrammes.

b. Classe d'âge la plus nombreuse : [40 ; 50[. Effectif : 13,4 millions d'hommes et de femmes.

c. Il y a de moins en moins de naissances : la base diminue avec l'âge qui diminue. Le nombre de naissances est en diminution, les individus les plus jeunes sont moins nombreux que ceux des générations précédentes.

d.

Classe d'âges (en années)	Homme et femmes (en millions)	x_i	$n_i \times x_i$
[0 ; 10[	7,5	5	37,5
[10 ; 20[	9,2	15	138
[20 ; 30[	9,6	25	240

Classe d'âges (en années)	Homme et femmes (en millions)	x_i	$n_i \times x_i$
[30 ; 40[	11,9	35	416,5
[40 ; 50[	13,4	45	603
[50 ; 60[	10	55	550
[60 ; 70[	10,6	65	689
[70 ; 80[	6,6	75	495
[80 ; 90[	3	85	255
[90 ; 100[	0,8	95	76
Total	$N = 82{,}6$		3 500

Estimation de l'âge moyen : $\dfrac{3500}{82{,}6} = 42{,}37$.

$\dfrac{N}{2} = \dfrac{82{,}6}{2} = 41{,}3$ et $7{,}5 + 9{,}2 + 9{,}6 + 11{,}9 = 51{,}6$.

Classe médiane : [30 ; 40[.

Étendue de l'âge : e = 100 – 0 = 100 ans.

2. Population Indienne

a. La pyramide des âges est constituée de deux histogrammes.

b. Classe d'âge la plus nombreuse : [0 ; 10[.

Effectif : 237 millions d'hommes et de femmes.

c. Il y a de plus en plus de naissances : la base augmente avec l'âge qui diminue. Le nombre de naissances est en augmentation, les individus les plus jeunes sont plus nombreux que ceux des générations précédentes.

d.

Classe d'âges (en années)	Homme et femmes (en millions)	x_i	$n_i \times x_i$
[0 ; 10[	237	5	1 185
[10 ; 20[	226	15	3 390
[20 ; 30[	191	25	4 775
[30 ; 40[	159	35	5 565
[40 ; 50[	126	45	5 670
[50 ; 60[	85	55	4 675
[60 ; 70[	51	65	3 315
[70 ; 80[	31	75	2 325
[80 ; 90[	7	85	595
[90 ; 100[	1,1	95	104,5
Total	$N = 1114{,}1$		31 599,5

Estimation de l'âge moyen : $\dfrac{31599{,}5}{1114{,}1} = 28{,}36$ ans.

$\dfrac{N}{2} = \dfrac{1114{,}1}{2} = 557{,}05$ et $237 + 226 + 191$ » 654.

Classe médiane : [20 ; 40[.

Étendue de l'âge : $e = 100 – 0 = 100$ ans.

3. Comparaison

a. L'Allemagne a sa population qui vieillit et une natalité qui diminue.

b. L'Inde a une très forte natalité et peu de personnes âgées.

c. L'Inde a au moins 25 % de sa population qui n'a pas 20 ans ($Q_1 = 15$ ans) et 75 % qui n'a pas 50 ans ($Q_3 = 45$ ans).

29 Jour d'inventaire

1.

Désignation	Prix HT en €	Nombre de ventes
1er prix 44AH	37,20	8
1er prix 65AH	46,70	10
Noral 44AH	48,50	14
Noral 65AH	63,80	9
Fulmix 44AH	66,30	7
Noral 70AH	77,20	4
Fulmix 65AH	81,60	4
Fulmix 70AH	93,80	4

2.

Indicateurs statistiques	x_{min}	Q_1	$\overline{x}$	Me	Q_3	x_{max}
Prix HT en €	37,2	46,7	58,21	48,5	66,3	93,8

Étendue = 93,8 – 37,2 = 56,6 €

3. Pour ce semestre, la comparaison des indicateurs statistiques montrent que les clients ont plutôt achetés des batteries moins chères. Il faut peut être rectifié l'offre ou modifier le point de vente et mettre plus en avant les batteries les plus chères.

30 Revenu moyen et revenu médian

1. Revenu moyen = (somme de tous les revenus en France) / (Nombre de revenus)

2. Revenu médian : On range dans l'ordre croissant tous les revenus en France, on prend le revenu qui partage en 2 parties égales.

3. Les revenus moyens et médians augmentent depuis les années 1970,

4. Le revenu moyen augmente plus vite que le revenu médian.

Les revenus les plus élevés, qui sont les moins nombreux, augmentent beaucoup plus que les revenus les plus faibles, qui sont eux plus nombreux.

31 Temps d'appel

1. a. b.

temps d'appel (en minutes)	n_i	x_i	$n_i \times x_i$
[0 ; 30[	30	15	450
[30 ; 60[	10	45	450
[60 ; 90[	96	75	7200

temps d'appel (en minutes)	n_i	x_i	$n_i \times x_i$
[90 ; 120[	40	105	4200
[120 ; 150[	14	135	1890
[150 ; 180[	10	165	1650
Total	200		15840

Durée moyenne du temps d'appel par mois :

$\bar{x}_1 = 79,2$ minutes = 1,32 heure

2. a. b. c.

temps d'appel (en minutes)	n_i	x_i	$n_i \times x_i$
[0 ; 60[	40	30	1200
[60 ; 120[	136	90	12240
[120 ; 180[	24	150	3600
Total	200		17040

Durée moyenne du temps d'appel par mois : $\bar{x}_2 = 85,2$ minutes = 1,42 heure

3. a. $\bar{x}_2 - \bar{x}_1 = 6$ min. Les deux moyennes sont différentes car les amplitudes des classes sont différentes donc les centres de classes sont différents dans les calculs.

b. $\bar{x}_1$ est une meilleure estimation que $\bar{x}_2$ de la moyenne réelle car l'approximation faite en prenant le centre de classes pour calculer la moyenne est d'autant plus grande que l'amplitude est grande.

c. Il aurait fallu disposer de toutes les durées d'appel pour calculer la moyenne exacte.

32 Age moyen des mères à l'accouchement

1. Un histogramme

2.

Classe d'âge	Nombre de naissances pour 100 femmes (2012)	x_i	$n_i \times x_i$
[15;25[	3,1	20	62
[25;30[	12,6	27,5	346,5
[30;35[	13,2	32,5	429
[35;40[	6,6	37,5	247,5
[40;45[	0,8	42,5	34
	36,3		1119

$\bar{x} = 1\,119/36,3 = 30,83$ ans

3. Classe médiane = [30 ;35[

4. a.

Classe d'âge	Nombre de naissances pour 100 femmes (1994)	x_i	$n_i \times x_i$
[15;25[	3,4	20	68
[25;30[	12,9	27,5	354,75
[30;35[	9,4	32,5	305,5
[35;40[	3,8	37,5	142,5
[40;45[	0,4	42,5	17
	29,9		887,75

b. $\bar{x} = 887,75/29,9 = 29,69$ ans

Classe médiane = [25 ;30[

5. L'âge moyen et la classe médiane pour l'accouchement en France a augmenté entre 1994 et 2012.

Les mères accouchent plus tard.

Démarche d'investigation

33 Prix moyen, prix médian

1.

	Effectif Petit outillage	Effectif Machine-outil	Effectif total outils
1re année	100 000	1 000	101 000
2e année	100 000	1 000	101 000

	Prix Petit outillage		Prix Machine-outil	
	médian	moyen	médian	moyen
1re année	10 €	10 €	1 000 €	1 000 €
2e année	8 €	8 €	1 200 €	1 200 €

	Prix médian des 101 000 outils	Prix moyen des 101 000 outils
1re année	10 €	19,80 €
2e année	8 €	19,80 €

2. a. Vrai : le prix moyen du petit outillage baisse de $100 - \dfrac{8 \times 100}{10} = 20$ soit 20 %.

b. Vrai : le prix moyen de vente d'un outil est toujours de 19,80 €.

c. Vrai : le prix médian de l'ensemble des outils baisse de $100 - \dfrac{8 \times 100}{10} = 20$ soit 20 %.

d. Vrai : le prix moyen de vente d'une machine-outil augmente $\dfrac{1\,200 \times 100}{1\,000} - 100 = 20$ soit 20 %.

3.

	1e année	2e année
Chiffre d'affaires	$19,80 \times 101\,000 = 1\,999\,800$ €	$19,80 \times 101\,000 = 1\,999\,800$ €
Moyenne $\bar{x}$	19,80 €	19,80 €
Médiane *Me*	10 €	8 €

	1^e année	2^e année
Étendue e	1 699 €	1 899 €
1^{er} quartile Q_1	8,5 €	6 €
3^e quartile Q_3	11,5 €	10 €

Le prix médian de vente des 101 000 outils baisse alors que le chiffre d'affaires de 1 999 800 € reste le même car le prix moyen de vente du petit outillage baisse et celui de vente des machines-outils augmente pour des effectifs identiques sur les deux ans.

Cela est confirmé par des quartiles Q_1 et Q_3 inférieurs la deuxième année à ceux de la première année alors que l'étendue augmente.

34 Qui aura la prime ?

Indicateurs statistiques	$\overline{x}$	Me	Q_3	e
Zone NO	541,7	537,5	706	672
Zone NE	535,5	534	759	599
Zone Paris	459,7	425	654	518
Zone SE	528,4	567,5	658	505
Zone SO	536,7	516	598	254

L'agent commercial de la zone N-E touchera la prime, il est le seul à répondre à tous les critères.

35 Chaîne du froid

Indicateurs statistiques	Q_1	$\overline{x}$	Me	Q_3	e
Congélateur 1	– 19	– 18,8	– 19	– 18	6
Congélateur 2	– 20	– 18,8	– 19	– 18	6

Peu de différence entre ces deux congélateurs, le premier quartile est plus faible pour le congélateur 2, il a donc plus de relevés de températures très basses, il a peut être besoin d'un réglage (pour économiser de l'énergie).

36 Pointures

4 présentoirs de taille identique : calcul des quartiles : $Q_1 = 37$; $Q_2 = 41$; $Q_3 = 43$; $Q_4 = 44$.

1^{er} présentoir : 8 paires de chaussures de taille 36 et 37 ;

2^e présentoir : 7 paires de chaussures de taille 38 à 41 ;

3^e présentoir : 7 paires de chaussures de taille 42 et 43 ;

4^e présentoir : 7 paires de chaussures de taille 44.

3 PROBABILITÉS

Capacités	Connaissances
• Expérimenter, d'abord à l'aide de pièces, de dés ou d'urnes, puis à l'aide d'une simulation informatique prête à l'emploi, la prise d'échantillons aléatoires de taille *n* fixée, extraits d'une population ou la fréquence *p* relative a un caractère est connue. • Déterminer l'étendue des fréquences de la série d'échantillons de taille *n* obtenus par expérience ou simulation.	• Tirage au hasard et avec remise de *n* éléments dans une population où la fréquence *p* relative a un caractère est connue. • Fluctuation d'une fréquence relative a un caractère, sur des échantillons de taille *n* fixée.
• Évaluer la probabilité d'un événement à partir des fréquences.	• Stabilisation relative des fréquences vers la probabilité de l'événement quand *n* augmente.
• Évaluer la probabilité d'un événement dans le cas d'une situation aléatoire simple. • Faire preuve d'esprit critique face à une situation aléatoire simple.	

La notion de fluctuation d'échantillonnage, essentielle en statistique, est abordée dans cette partie du programme en étudiant la variabilité d'observation d'une fréquence. Elle favorise une expérimentation de l'aléatoire.

L'objectif de ce chapitre est de faire comprendre que le hasard suit des lois et de préciser l'approche par les fréquences de la notion de probabilité initiée en classe de troisième.

Après une expérimentation physique (avec une pièce de monnaie, un dé ou une urne contenant des boules), pour une taille fixée des échantillons, la simulation à l''aide du générateur de nombres aléatoires d'une calculatrice ou d''un tableur permet d'augmenter la taille des échantillons et d'observer des résultats associes a la réalisation d'un très grand nombre d'expériences.

Activité 1 : Combien de chances de tirer la bonne carte ?

1. $p = \dfrac{31}{32} = 0{,}96875 \approx 0{,}97$ soit 97 %.

2. Obtenir une dame : $p = \dfrac{4}{32} = 0{,}125$ soit 12,5 %.

Obtenir un pique : $p = \dfrac{8}{32} = 0{,}25$ soit 25 %.

3. On a autant de chances d'obtenir un carré de 7 que d'as. Toutes les cartes ont la même probabilité d'être tirées.

ACTIVITÉ 2 : Voter au hasard a-t-il une incidence sur le scrutin ?

4. b. La fréquence de sortie du pile se rapproche de 50% quand le nombre de lancers augmente.

La réponse aux autres questions dépend des résultats obtenus en classe.

Activité 3 : Comment évaluer la fréquence de journaux avec des défauts ?

1.

Jour	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi	Samedi	Dimanche
Journaux contrôlés	500	200	100	400	700	600	300
Journaux mal découpés	32	6	10	14	35	36	27
Fréquence de journaux mal découpés	**0,064**	**0,03**	**0,1**	**0,035**	**0,05**	**0,06**	**0,09**

2. $p \approx 0{,}05$ soit 5 % : on choisit la fréquence du jour où le nombre de journaux contrôlés est le plus élevé pour avoir un résultat le plus fiable possible.

Travaux pratiques

Ticket gagnant

Aucune certitude de posséder un ticket gagnant en achetant 10 tickets.

1. a. [0 ; 1[

b. [0,1 ; 1,1[

c. «0» correspond aux valeurs appartenant à [0,1 ; 1[soient 90% des valeurs = tickets perdants ;
«1» correspond aux valeurs appartenant à [1 ; 1,1[soient 10% des valeurs = tickets gagnants.

2. a. Le résultat de la cellule K1 indique le nombre de tickets gagnants sur 10 tickets achetés.

b. Sur Excel.

c. Le résultat de la cellule K1002 indique le nombre de fois où 10 tickets consécutifs sont perdants sur 1000 séries de 10 tickets achetés.

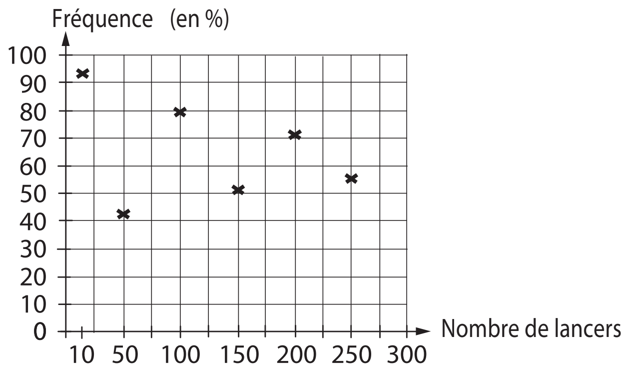
3. Conclusion : l'affirmation « Un ticket gagnant sur 10 tickets ! » ne signifie pas que l'on aura un ticket gagnant en achetant 10 tickets. La simulation montre qu'environ 350 fois sur 1000 séries de 10 tickets, il n'y a aucun ticket gagnant sur 10 tickets achetés.

De quel côté tombe la tartine de confiture ?

1. a. Tous les cas sont possibles.

b. Plus le nombre de lancers augmente, plus les fréquences tendent vers 60 %.

2. a.



b. Plus le nombre de lancers augmente, plus les fréquences tendent vers 60 %.

3. lorsqu'un objet n'est pas symétrique, les différentes positions dans lesquelles il peut s'immobiliser n'ont pas la même probabilité. Il faut donc réaliser une expérience avec de vraies tartines, et un nombre de lancers importants, pour estimer la probabilité pour la face recouverte de confiture de tomber sur le sol.

Exercices

1 **a.** Non aléatoire ; **b.** Aleatoire ;
c. Non aléatoire ; **d.** Aléatoire.

2 **a.** $f = \dfrac{100 - 48}{100} = 0{,}52$ soit 52 %.

b. Étendue des fréquences : 0,52 – 0,45 = 0,07 soit 7 % de boules rouges.

3 **a.** $f = 1 - (0{,}13 + 0{,}26 + 0{,}28) = 1 - 0{,}67 = 0{,}33$ soit 33 %.

b. Étendue des fréquences : 0,33 – 0,24 = 0,09 soit 9 % de « face 2 ».

4 **a.** Caractère : côté visible de la pièce après l'avoir lancée.
Modalité étudiée : côté « pile ».

b. 20 échantillons de 10 lancers.

c. Étendue des effectifs : 10 – 1 = 9 « pile ».

5 **a.** $n = 100$ lancers.

b. Étendue des effectifs : 60 – 40 = 20 « pile ».
Étendue des fréquences : $\dfrac{20}{100} = 0{,}20$ soit 20 % de « pile ».

6 **a.** $n_{min} = 10$ lancers et $n_{max} = 120$ lancers.

b. $p \approx 0{,}50$ soit 50 %.

c. p correspond à la probabilité d'obtenir « pile ».

7 **a.** Une pièce de monnaie, un dé à 4, 6, 8, 10 ou 20 faces, une urne contenant la même quantité de boules de 2 couleurs différentes, une urne contenant la même quantité de boules numérotées avec des nombres pairs et impairs.

b. Un dé à 6 faces, une urne contenant 6 boules de couleurs différentes, une urne de 6 boules numérotées.

c. Un dé à 6 faces, une urne contenant 3 boules de couleurs différentes, une urne de 3 boules numérotées.

d. Un dé à 20 faces, une urne contenant 20 boules de couleurs différentes, une urne de 20 boules numérotées.

e. Une urne contenant 45 %, 9 %, 3 % et 43 % de boules de différentes couleurs.

8 **a.** La formule fait apparaître un nombre appartenant à l'intervalle [0 ; 1[.

b. La formule fait apparaître un nombre appartenant à l'intervalle [0 ; 2[.

c. La formule fait apparaître 0 ou 1.

9 **a.** $\boxed{\text{=ALEA()*3}}$

b. $\boxed{\text{=ENT(ALEA()*3)}}$

c. $\boxed{\text{=ENT(ALEA()+(90/100))}}$

10 **a.** Il y a quatre échantillons.

b. Ces nombres représentent les fréquences de « 1 ».

c. Étendue des fréquences : 0,741 – 0,677 = 0,064 soit 6,4 % de « 1 ».

11 **a.** $p \approx 1{,}7$

b. La valeur p correspond à la probabilité d'obtenir le « 5 ».

12 $\frac{1}{10} = 0{,}1$ soit 10 % de chance d'être choisi.

$1 - 0{,}1 = 0{,}9$ soit 90 % de chance de ne pas l'être.

13 $\frac{4}{1000} = 0{,}004$: probabilité d'obtenir le gros lot.

$1 - 0{,}004 = 0{,}996$ soit 99,6 % : probabilité de ne pas obtenir le gros lot.

14 **a.** $\frac{50}{100} = 0{,}5$ soit 50 %.

b. $\frac{10}{100} = 0{,}1$ soit 10 %.

15 **a.** $\frac{8}{32} = 0{,}25$ soit 25 %.

b. 25 cartes.

16 **a.** $\frac{1}{37} \approx 0{,}027$ soit 2,7 %.

b. $\frac{18}{37} \approx 0{,}486$ soit 48,6 %.

17 $\frac{4}{28} \approx 0{,}1429$ soit 14,29 %.

18 Les genres à la naissance, masculin ou féminin, sont équiprobables.

QCM : Testez-vous !

1. A. un dé à 6 faces : on attribue 2 faces à chaque film.

2. B. 0,17 : e = 0,25 – 0,08.

3. B. un peu différente ou égale à 0,50 soit 50 %.

4. C. $\boxed{\text{=ENT(ALEA()*2)}}$

5. B. peu probable.

6. C. autant de chances d'obtenir pile que face : ce nouveau tirage ne dépend pas des précédents.

7. A. 0,20 : $p = \frac{20}{80 + 20} = 0{,}20$.

Problèmes

19 Lancers de pièces

1. Les élèves obtiennent à partir des nombres aléatoires donnés par la calculatrice 5 échantillons de 30 P et F.

2. a. Au moins 95 % des effectifs appartiennent à l'intervalle [9 ; 21[.

b. Étendue des effectif ≈ 11 « pile ».

3. a. Au moins 95 % des fréquences appartiennent à l'intervalle [0,30 ; 0,70[.

b. Étendue des fréquences : 0,40 soit 40 %.

4. $p \in [0{,}30 ; 0{,}70[$.

20 Dé non truqué

1., **2.** et **3.**

	A	B	C	D	E
1	4				
2	2		Face	Effectif	Fréquences
3	6		1	3262	0,1631
4	3		2	3322	0,1661
5	5		3	3324	0,1662
6	1		4	3378	0,1689
7	4		5	3427	0,17135
8	6		6	3287	0,16435
9	4				

4. a. $f \approx 1{,}67$

b. $p = \frac{1}{6} \approx f$

21 Pisciculture

1. Somme de 1 la plus petite : 36
Somme de 1 la plus grande : 64.

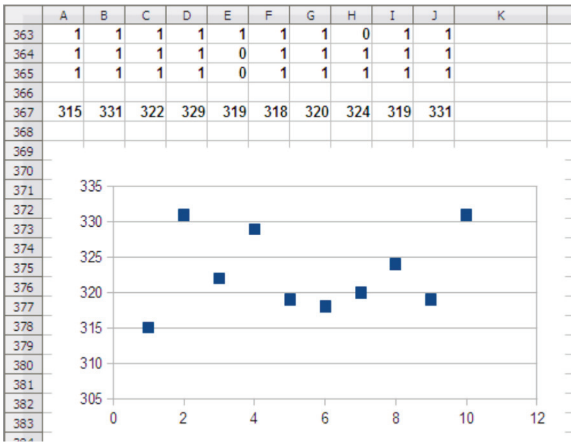
2. $f_{min} = 0{,}36$ et $f_{max} = 0{,}64$.

3. Étendue des fréquences : $f_{max} - f_{min} = 0{,}28$.

4. $0{,}58 \in [f_{min} ; f_{max}]$: on peut donc supposer qu'il n'y a pas de pollution.

22 Durée d'ensoleillement

1. a. et **b.**



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
363	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	
364	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	
365	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	
366											
367	315	331	322	329	319	318	320	324	319	331	

c. Au moins 95 % des effectifs appartiennent à l'intervalle [296 ; 334].

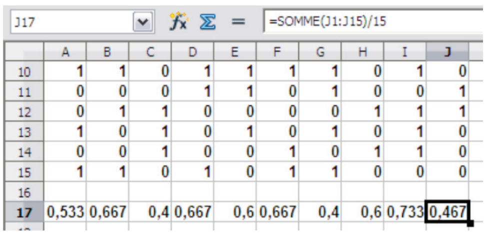
2. [296 ; 334].

23 Conseil municipal et représentativité

1. a. $p = \dfrac{338}{650} = 0{,}52$ soit 52 %.

b. $f = \dfrac{5}{15} \approx 0{,}33$ soit 33 %.

c.



J17 =SOMME(J1:J15)/15

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
10	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0
11	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1
12	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1
13	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
14	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0
15	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0
16										
17	0,533	0,667	0,4	0,667	0,6	0,667	0,4	0,6	0,733	0,467

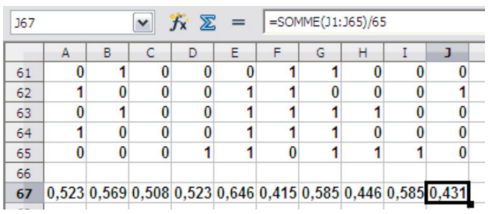
d. Étendue des fréquences : $0{,}80 - 0{,}25 = 0{,}55$ soit 55 %.

e. Le hasard peut expliquer la faible proportion de femmes : $f \approx 0{,}33$ est une fréquence qui est dans l'intervalle des valeurs obtenues par simulation.

2. $p = \dfrac{165\ 945}{319\ 064} = 0{,}52$ soit 52 % : c'est la proportion de femmes dans la commune.

$f = \dfrac{15}{65} \approx 0{,}23$ soit 23 % : c'est la fréquence de femmes au sein du conseil municipal.

La simulation sur tableur donne $f_{min} \approx 0{,}39$ et $f_{max} \approx 0{,}65$.



J67 =SOMME(J1:J65)/65

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
61	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0
62	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1
63	0	1	0	0	1	1	1	1	0	0
64	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0
65	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0
66										
67	0,523	0,569	0,508	0,523	0,646	0,415	0,585	0,446	0,585	0,431

Le hasard ne peut pas expliquer la faible proportion de femmes au sein du conseil :

$$f \approx 0{,}23 \notin [f_{min} ; f_{max}].$$

On peut supposer qu'il y a discrimination.

24 Passage aux caisses

1. On construit la ligne Total pour chaque caisse. La plus fréquentée est la caisse F, avec 485 clients.

		Caisse						
		A	B	C	D	E	F	Total
Échantillons de 100 clients	1	12	8	10	13	5	45	100
	2	3	3	23	12	3	47	100
	3	3	10	23	13	6	48	100
	4	3	6	16	14	4	55	100
	5	5	16	22	11	3	54	100
	6	7	7	18	8	7	46	100
	7	8	10	25	14	7	50	100
	8	7	10	20	9	6	50	100
	9	5	7	21	6	2	43	100
	10	2	3	19	11	5	47	100
Total		**55**	**80**	**197**	**111**	**48**	**485**	**1 000**

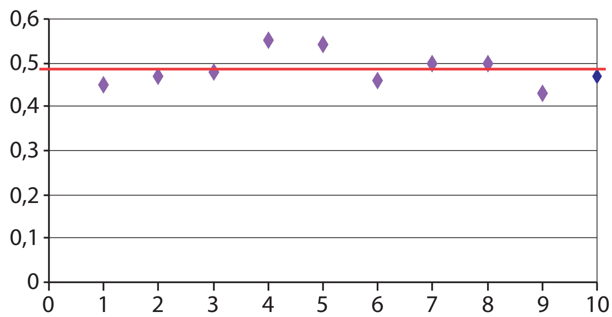
2. a. Pour la caisse F : effectif maximal : 55 ; effectif minimal : 43.

b.

		F	f_i
Échantillons de 100 clients	1	45	**0,45**
	2	47	**0,47**
	3	48	**0,48**
	4	55	**0,55**
	5	54	**0,54**
	6	46	**0,46**
	7	50	**0,50**
	8	50	**0,50**
	9	43	**0,43**
	10	47	**0,47**

Étendue des fréquences : $f_{max} - f_{min} = 0{,}55 - 0{,}43 = 0{,}12$.

c. et **d.**



Probabilité qu'un client passe par la caisse F : $p \approx 0{,}49$ soit 49 %.

25 Répondre au hasard aux QCM

1. $\frac{1}{4} = 0{,}25$ soit 25 % de chances de répondre juste au hasard.

2.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
19	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
20	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
21										
22	10	5	2	7	5	3	2	3	4	2
23										
24										
25		Min	2							
26		Max	10							

3. Au moins 95 % des effectifs appartiennent à l'intervalle [1 ; 10].
Étendue de la fluctuation de la quantité du chiffre 1 : 10 – 1 = 9.

4. Le candidat peut espérer obtenir la moyenne de 10 qui est une valeur obtenue par simulation.

Démarche d'investigation

26 Fiche médicale

Simulation informatique de 10 échantillons de taille $n = 495$ avec la formule $\boxed{\text{=ENT(ALEA()+(1/7))}}$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
493	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
494	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
495	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
496										
497	82	93	66	58	67	74	59	64	71	84
498										
499										
500		min	58		max	93				

Les élèves obtiennent au moins 95 % des effectifs dans l'intervalle [48 ; 93].
Le hasard peut expliquer la proportion d'élèves asthmatiques dans cet établissement : l'effectif de 78 élèves appartient à l'intervalle [effectif minimal ; effectif maximal] trouvé par simulation informatique.

27 Défaut de tablettes numériques

Simulation informatique de 10 échantillons de taille $n = 50$ avec la formule $\boxed{\text{=ENT(ALEA()+ (0,14))}}$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
48	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0		
49	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0		
50	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0		
51												
52	7	7	1	13	5	6	7	9	4	8		Effectif
53												
54	0,14	0,14	0,02	0,26	0,1	0,12	0,14	0,18	0,08	0,16		Fréquence
55												
56												
57		min	0,02		max	0,26						

Les élèves obtiennent au moins 95 % des fréquences dans l'intervalle [0,01 ; 0,29].

Le hasard peut expliquer la fréquence de pièce avec un défaut dans l'échantillon prélevé : cette fréquence $f = \frac{10}{50} = 0{,}20$ soit 20 % appartient à l'intervalle [effectif minimal ; effectif maximal] trouvé par simulation informatique.

28 Le tirage au sort est-il équitable ?

L'élève doit faire la différence lors de son expérimentation entre fréquence de sortie et probabilité.

Le capitaine a évidemment tort, il est possible sur dix lancers de n'avoir que deux fois le coup d'envoi.

29 Plus de billets réservés que de places

$f = \frac{698}{13\ 954} \approx 0{,}05$ soit 5 %.

Il y a donc $529 \times 0{,}05 \approx 26$ absents en moyenne par avion.
529 – 26 = 503 passagers présents en moyenne.
545 – 529 = 16 places réservées en plus par avion.

La simulation informatique donne, à la ligne 548, les effectifs correspondant aux personnes qui ne se sont pas présentées à l'embarquement. Ils appartiennent à l'intervalle [14 ; 32] avec un seul effectif de 14 inférieur à 16.
Il y a donc 414 passagers en plus dans cette simulation avec surréservation et un seul cas où il manque deux places. Les gestionnaires ont donc bien fait de prendre le risque que plus de 529 passagers se présentent à l'embarquement.

Nombre de passagers absents avec 545 réservations par avions : a	Passagers présents sur 545 billets : $b = 545 - a$	Passagers en plus des 503 présents en moyenne avant surréservation : $c = b - 503$
29	516	13
22	523	20
19	526	23
24	521	18
18	527	24
27	518	15
28	517	14
27	518	15
14	531	28
26	519	16
33	512	9
24	521	18
32	513	10
25	520	17
32	513	10
23	522	19
19	526	23
26	519	16
32	513	10
30	515	12
22	523	20
28	517	14
30	515	12
26	519	16
20	525	22
Total 636	12989	414

4 PROBLÈMES DU PREMIER DEGRÉ À UNE INCONNUE

Capacités	Connaissances
• Dans des situations issues de la géométrie, d'autres disciplines, de la vie professionnelle ou de la vie courante, rechercher et organiser l'information, traduire le problème posé à l'aide d'équations ou d'inéquations, le résoudre, critiquer le résultat, rendre compte. • Choisir une méthode de résolution adaptée au problème (algébrique, graphique, informatique).	• Méthodes de résolution : – d'une équation du premier degré à une inconnue ; – d'une inéquation du premier degré à une inconnue.

L'objectif de ce chapitre est la traduction de problèmes concrets de la vie courante et professionnelle en langage mathématique. Les équations ou les inéquations ainsi obtenues doivent être résolues par une méthode adaptée parmi les choix suivants : algébriques, graphiques ou TIC. Le professeur doit éviter toute virtuosité technique.

Activité 1 : Combien vendre ces flacons de parfum ?

1. Soit x le prix d'un parfum avec emballage carton.
$100 \times (x + 7) + 150 \times x = 18700$ soit $250\,x + 700 = 18700$

2. $x = 18000/250 = 72$
Parfum avec emballage carton vendu 72 € pièce et avec emballage plastique vendu 79 € pièce.

Activité 2 : Commande de fourniture

1. En boutique : 63,00 € et sur internet : 66,40 € ; plus avantageux en boutique pour 6 unités.

2. En boutique : 157,50 € et sur internet : 155,50 € ; 2 € d'économie sur internet pour 15 unités.

3. $9{,}9\,x + 7 < 10{,}5\,x$ soit $12 < x$ L'achat sur internet est avantageux pour plus de 12 unités.

Activité 3 : Quel contrat choisir ?

1. $151{,}67 \times 9{,}40 = 1425{,}70$ € ≈ smic mensuel brut du document ministériel (1425,67 €)

2. 151,67 heures par mois avec la 2$^{\text{ème}}$ proposition : $500 + 0{,}61 \times 9{,}40 \times 151{,}67 = 1369{,}68$ €
Pour un même nombre d'heures de travail, la première proposition est plus intéressante.

3. $500 + 0{,}61 \times 9{,}40 \times x > 1425{,}70$ soit $x > 161{,}44$
Pour plus de 161,44 heures mensuelles effectuées le salaire brut mensuel de la deuxième proposition est plus avantageux.

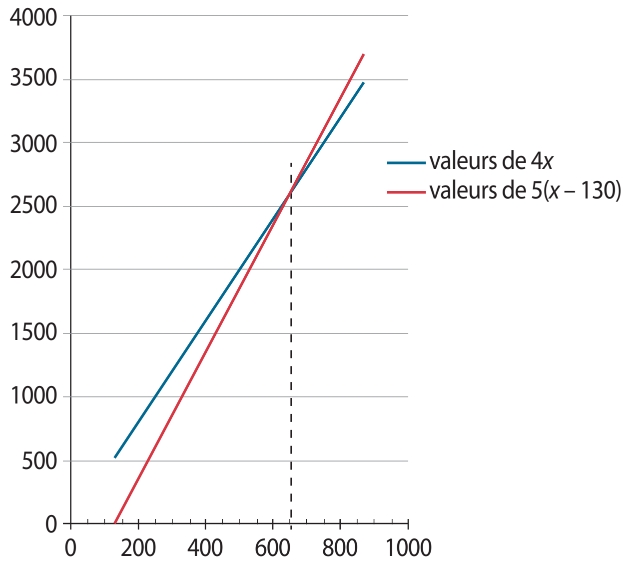
Travaux pratiques

La fête du village

1. **a.** $4x$: somme récoltée si tout le village vient.
b. $5(x-130)$: somme récoltée s'il manque 130 personnes.
c. On doit récolter la même somme pour pouvoir payer la troupe.

2. Le TP montre qu'il y a 650 personnes dans le village.

3.



Rentable ou non ?

1. **a.** Extrait du tableau

23	2200	590	607
24	2300	610	617
25	2400	630	627
26	2500	650	637
27	2600	670	647

b. Jusqu'à 2 300 km, il n'est pas rentable de louer le minibus mais pour une distance supérieure à 2 400 km, la location de ce minibus est rentable.

2. **a.** $0{,}2x$ représente le coût en essence pour x kilomètres parcourus par les deux voitures et 150 représente le coût de l'autoroute pour les deux voitures, soit un coût total pour les voitures égal à $0{,}2x + 150$.

Pour le minibus $0{,}1x$ représente le coût en essence et 387 représente le coût de l'autoroute et la location $(75 + 312)$.

b. $0{,}2x + 150 > 0{,}1x + 387 \Leftrightarrow 0{,}1x > 237 \Leftrightarrow x > 2\,370$. Une distance aller de 1 250 km correspond à un aller retour de 2 500 km. Il est donc plus rentable de louer le minibus que de prendre les deux voitures.

Exercices

Équations

1 Les équations vérifiées par $x = 15$ sont :
b. $x - 9 = 6$; **d.** $22 - x = 7$; **e.** $\frac{x}{5} + 30 = 33$
et **g.** $2(2x - 10) + 4 = 3x - 1$.

2 **a.** $x = 12$; **b.** $x = 22$; **c.** $x = 7{,}5$; **d.** $x = 27$;
e. $x = 9$; **f.** $x = 7$; **g.** $x = 60$; **h.** $x = 117{,}5$.

3 **a.** $x = 29{,}5$; **b.** $x = 14$; **c.** $x = 18$; **d.** $x = 25$;
e. $x = 11$; **f.** $x = 21$.

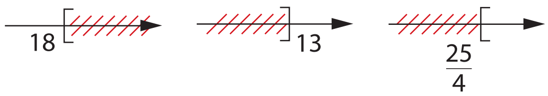
4 **a.** $x = 13$; **b.** $x = 250$; **c.** $x = 43$; **d.** $x = 83$;
e. $x = 19$; **f.** $x = 700$.

5 **a.** $x = -\frac{4}{5}$; **b.** $x = 6$; **c.** $x = \frac{35}{8}$; **d.** $x = -6$
et $x = \frac{9}{2}$; **e.** $x = -15$; **f.** $x = 0$.

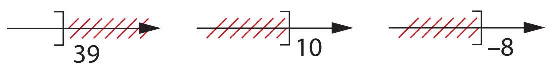
Inéquations

6 Les inéquations pour lesquelles la solution $x = 0$ est vérifiée sont :
b. $2x + 1 > 0$; **c.** $\frac{5x}{3} - 8 < 0$; **d.** $25 > 50x + 1$;
f. $(3x + 1)(5x + 3) \geqslant 0$.
Ces solutions ne sont pas uniques.

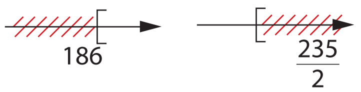
7 **a.** $x < 18$; **b.** $x > 13$; **c.** $x \geqslant \frac{25}{4}$;



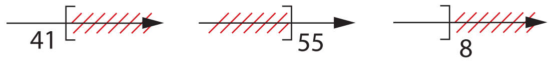
d. $x \leqslant 39$; **e.** $x > 10$; **f.** $x > -8$;



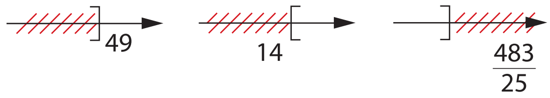
g. $x \geqslant 186$; **h.** $x \leqslant \frac{235}{2}$.



8 **a.** $x < 41$; **b.** $x > 55$; **c.** $x \leqslant 8$;



d. $x > 49$; **e.** $x \geqslant 14$; **f.** $x \leqslant \frac{483}{25}$.



Résolution d'un problème

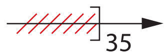
9 **a.** $2x + 13 = 34$; $x = 10{,}5$; **b.** $3x - 2000 = 4039$;
$x = 2013$;
c. $2x - 1 = x + 4{,}5$; $x = 5{,}5$; **d.** $5(x + 3) = 4x + 40$;
$x = 25$.

10 $\alpha + 2\alpha + 3\alpha = 180 \Leftrightarrow \alpha = 30$ donc $2\alpha = 60$ et $3\alpha = 90$. Ce triangle sera toujours rectangle.

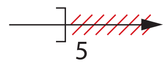
11 $\alpha + 2\alpha + 120 + 90 = 360 \Leftrightarrow \alpha = 50°$

12 $2L + 2l = 3L \Leftrightarrow L = 2l$. Il faut que sa longueur soit toujours deux fois plus grande que sa largeur.

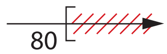
13 **a.** $x + 15 > 50$ donc $x > 35$



b. $2x - 10 \leqslant 0$ donc $x \leqslant 5$

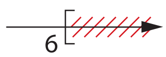


c. $\frac{3x}{4} < 60$ donc $x < 80$



QCM : Testez-vous !

1. C. $2x = 12$
2. B. $x = 1{,}4$
3. B. $x = 30$
4. A. $x > 8$
5. C. $x \geq 5$
6. A.



Problèmes

14 Abonnement ou match par match ?

1. Non car l'abonnement coûte 330 € alors que 8 matchs coûtent 35 × 8 soit 280 €.

2. Oui pour les abonnements en tribune Nord/Sud ou en tribune latérale Gabarrou.

3. $38x > 350 \Leftrightarrow x > 9{,}2$.

Pour moins de 9 matchs, il est préférable de payer match par match alors que, pour 10 et plus, il vaut mieux l'abonnement.

15 Prévision d'un budget

1. $30x = 180 - 24 \times 2$ soit $x = 4{,}4$ donc participation financière de 4,40 € par invité.

2. a. $180 - 25 \times 4{,}40 = 70$ € à débourser par les deux organisateurs.

b. $25x = 180 - 24 \times 2$ soit $x = 5{,}28$ donc participation financière de 5,28 € par invité.

16 Retrouver le bon prix

1.

Tailles	34	36	38	40	42	44	46	48
Nombre de pantalons	1	2	2	3	3	2	1	1

2. $8\,x + 7\,x \times 1{,}08 + 15 \times 4{,}3 = 640{,}22$

3. $x = 37$ €

4. Du 34 au 40 prix = 37 € HT et 44,25 € TTC
Du 42 au 48 prix = 39,96 € HT ou 47,79 € TTC

17 Changeons nos habitudes !

1. Quatre formules sont proposées.

2. On calcule d'abord les coûts pour chaque formule :
– formule Unité : 2 € × 100 = 200 € ;
– formule Carnet : 10 × 15 € = 150 € ;
– formule Mensuel : 40€ × 12 = 480 € ;
– formule Annuel : 396 € ;
La formule la plus intéressante pour effectuer 100 voyages est la formule des carnets de 10 voyages.

3. a. L'abonnement annuel n'est pas adapté.
b.

Nombre de voyages	Formules à choisir
De 1 à 7 voyages	Voyages à l'unité
De 8 à 10 voyages	Le carnet 10 voyages
De 11 à 15 voyages	Voyages à l'unité
De 16 à 20 voyages	2 carnets de 10 voyages
Plus de 20 voyages	Abonnement mensuel

4. a. $2x > 396$
b. $x > 198$
Au-delà de 198 voyages, le choix doit se porter sur l'abonnement annuel.

18 Comment vont les affaires ?

1. Soit x le prix d'achat : $x \times \dfrac{12}{100} = 50{,}40$

$\Rightarrow x = \dfrac{50{,}4 \times 100}{12} = 420$ €

$\Rightarrow$ prix au kg $= \dfrac{420}{350} = 1{,}20$ €

2. bénéfice – perte = 50,40

$\Rightarrow x \times 1{,}2 \times \dfrac{20}{100} - (350 - x) \times 1{,}2 \times \dfrac{5}{100} = 50{,}40$

$\Rightarrow 0{,}3\,x = 71{,}40 \;\Rightarrow x = 238$ kg

19 Prix et pointure

x = prix de la chaussure taille 39

$x + 1{,}05\,x = 143{,}5 \Rightarrow x = 70$

Prix taille 39 = 70 € HT ou 83,72 € TTC

Prix taille 42 = 73,5 € HT ou 87,91 € TTC

20 Choix de la durée d'un prêt

x : montant d'une mensualité

$x + 42{,}28 \leqslant 1\,798{,}15 \times 0{,}33$

$x \leqslant 551{,}11$ les durées possibles de l'emprunt sont 22 ou 25 ans.

21 Quel prix unitaire pour ce tee-shirt ?

Les informations sur les deux lots permettent de savoir qu'1 tee-shirt sérigraphié coute 2 € de plus qu'un tee-shirt uni.

Donc 5 tee-shirts sérigraphiés coutent 30 € soit 6 € un tee-shirt sérigraphié.

Démarche d'investigation

22 Autonomie d'un véhicule

1. $\dfrac{x}{6} = \dfrac{550}{100} \Rightarrow x = \dfrac{550 \times 6}{100} = 33$ L

2. $\dfrac{x}{54} = \dfrac{100}{6} \Rightarrow x = \dfrac{100 \times 54}{6} = 900$ km

23 Indice des prix

1. $x = 35{,}5 \times 115{,}15/100 \approx 40{,}88$ €

2. $x = 53 \times 100/115{,}15 \approx 46{,}03$ €

24 Brève de comptoir

Soit x le montant du gros lot. Récapitulons ce que la personne veut donner aux enfants:

$\dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{3} + \dfrac{x}{4} = \dfrac{6x}{12} + \dfrac{4x}{12} + \dfrac{3x}{12} = \dfrac{13x}{12}$; c'est plus que le gros lot !

25 La tombola

Soit x le nombre minimal de billets vendus.

$\Rightarrow x \times 5 = 2\,200 + 500 \Rightarrow x = \dfrac{2\,700}{5} \Rightarrow x = 540$

26 Frais d'achat

x = prix d'achat

$160 + 0{,}02\,x + 0{,}1\,x = 460 \Rightarrow x = 2\,500$ €

5 PROBLÈMES DU PREMIER DEGRÉ À DEUX INCONNUES

Capacités	Connaissances
• Dans des situations issues de la géométrie, d'autres disciplines, de la vie professionnelle ou de la vie courante, rechercher et organiser l'information, traduire le problème posé à l'aide d'équations ou d'inéquations, le résoudre, critiquer le résultat, rendre compte. • Choisir une méthode de résolution adaptée au problème (algébrique, graphique, informatique).	• Méthodes de résolution d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues.

L'objectif de ce chapitre est la traduction de problèmes concrets de la vie courante et professionnelle en langage mathématiques. Les systèmes d'équations ainsi obtenues doivent être résolues par une méthode adaptée parmi les choix suivants : algébriques, graphiques ou TIC. Le professeur doit éviter toute virtuosité technique.

Activité 1 : Rentabilité ou non d'un abonnement annuel

1. Les deux tarifs proposés sont équivalents pour 5 spectacles.

2. Le tarif normal est avantageux si on assiste à moins de 5 spectacles alors que le tarif abonné est avantageux pour plus de 5 spectacles.

3. $16x = 12x + 20$ soit $4x = 20$ donc $x = 5$.

Activité 2 : Prix soldés

1. $x + y = 97{,}20$

2. $0{,}60x$ représente 60 % du prix du pull soit 40 % de remise sur ce prix.

$0{,}75y$ représente 75 % du prix du pull soit 25 % de remise sur ce prix.

3. $x + y = 97{,}20$

$0{,}60x + 0{,}75y = 68{,}43$.

4. $0{,}60 \times 29{,}80 + 0{,}75 \times 67{,}40 = 68{,}43$ donc le pull est à 29,80 € et le pantalon à 67,40 €.

Activité 3 : Mon panier sur internet

1. Le coffret *Sports extrêmes* est à un tarif plus élevé que le coffret *Aventure* car les coefficients sont inversés entre les deux simulations et c'est celle avec les deux coffrets *Sports extrêmes* qui est la plus coûteuse.

2. Soit x le prix du coffret *Aventure* et y le prix du coffret *Sports extrêmes*.

$x + 2y = 205{,}70$

$2x + y = 195{,}70$

3. Le coffret *Aventure* est à 61,90 € et le coffret *Sports extrêmes* est à 71,90 €.

Travaux pratiques

Paiement de facture en monnaie

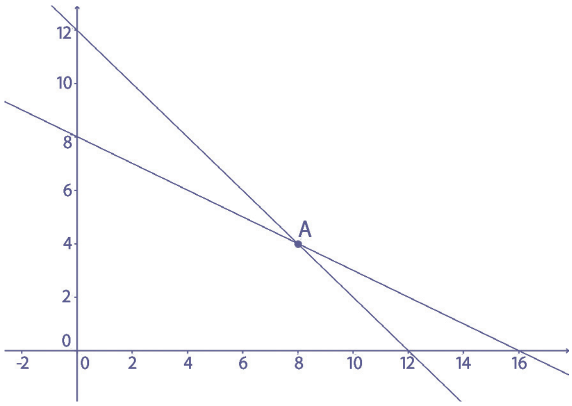
1. a. $10x + 20y = 160$: cette équation correspond à la somme totale des billets de 10 € et 20 €, on a en tout la somme de 160 €

b. $x + y = 12$: Cette équation correspond à la somme du nombre total de billets de 10€ et 20€. On a en tout 12 billets.

2. b. Le logiciel a tracé une droite.

c. L'équation a été simplifié (division par 10), on obtient $x + 2y = 16$

e. Solution graphique (8 ; 4)



f. Équation 1 : $y = -0{,}5x + 8$; Équation 2 : $y = -x + 12$

3. a. $-0{,}5x + 8 = -x + 12$

$x = 4/0{,}5 = 8$ et $y = -0{,}5*8 + 8 = 4$

b. On remplace 12 par 18 dans la deuxième équation.

La solution mathématiques trouvée (20 ; – 2) est impossible pour le problème.

Il n'y a pas de solutions dans le cas de 18 billets.

Tarif normal et tarif réduit

Il y a 200 places au total, donc le nombre x de places vendues au tarif normal plus le nombre y de places vendues au tarif réduit égale 200, d'où : $x + y = 200$.

De plus, ces x places vendues 9,50 € et ces y places vendues 7,50 € ont rapporté 1 636 € d'où :

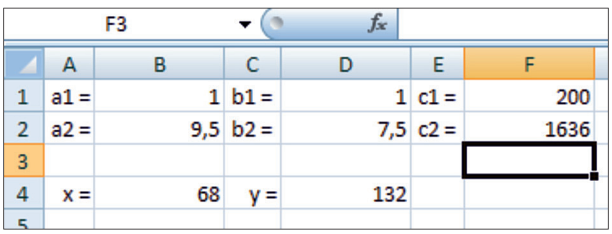
$$9{,}5x + 7{,}5y = 1\ 636.$$

1.

Coefficients	a_1	b_1	c_1	a_2	b_2	c_2
Valeurs dans ce système	1	1	200	9,5	7,5	1 636

2. La calculatrice donne $x = 68$ et $y = 132$. Il a été vendu 68 places au tarif normal et 132 au tarif réduit.

3.



F3

	A	B	C	D	E	F
1	a1 =	1	b1 =	1	c1 =	200
2	a2 =	9,5	b2 =	7,5	c2 =	1636
3						
4	x =	68	y =	132		

4. La solution de ce système est le couple (68 ; 132). Il s'est vendu 132 places au tarif réduit.

Exercices

Vérification d'une solution

1 **a.** $x = 7$ et $y = 3$ **b.** $x = 3{,}5$ et $y = 5$ **c.** $x = 6$ et $y = 6$

Résolution algébrique

2 **a.** $\begin{cases} x - y = 6 \\ x + y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 + y \\ 6 + y + y = 8 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 + y \\ 2y = 8 - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} -2x + y = -1 \\ 3x - 2y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 + 2x \\ 3x - 2(-1 + 2x) = -2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 + 2x \\ 3x - 4x + 2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 7 \\ x = 4 \end{cases}$

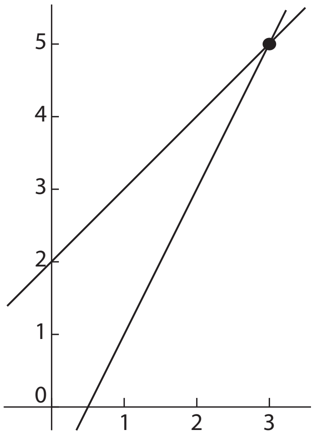
c. $\begin{cases} x + y = 30 \\ 7x + 12y = 300 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 30 - y \\ 7(30 - y) + 12y = 300 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 30 - y \\ -7y + 12y = 300 - 210 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = 18 \end{cases}$

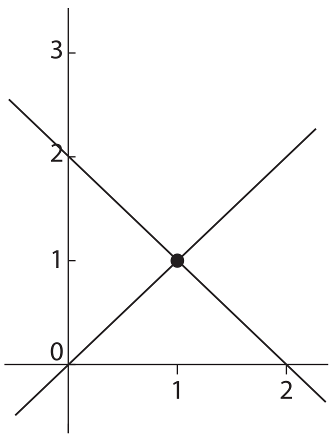
3 **a.** $x = 4{,}4$ et $y = 0{,}2$ **b.** pas de solution
c. $x = 5$ et $y = -1$ **d.** $x = 4$ et $y = 7$
e. $x = \dfrac{40}{13}$ et $y = \dfrac{24}{13}$ **f.** $x = 1{,}25$ et $y = 0{,}25$

Résolution graphique

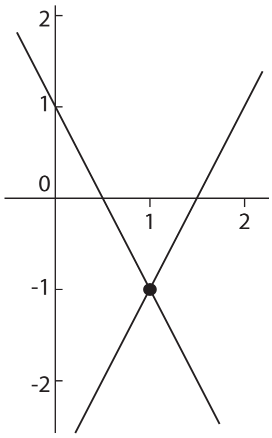
4



a. $x = 3$ et $y = 5$



b. $x = 1$ et $y = 1$



c. $x = 1$ et $y = -1$

Résolution informatique

5 **a.** $x = 2{,}6$ et $y = 1{,}8$
b. infinité de couples solution **c.** $x = 12{,}5$ et $y = 8{,}5$

6 **a.** $x = 3$ et $y = 1$ **b.** $x = 0$ et $y = 3$
c. $x = 36$ et $y = 11$

Résolution au choix

7 **a.** $x = 15$ et $y = 21$ **b.** $x = 0{,}5$ et $y = 0$
c. $x = 7$ et $y = 5$ **d.** $x = 0$ et $y = 0$
e. $x = -4$ et $y = 10$ **f.** $x = 1$ et $y = -1$
g. $x = -0{,}7$ et $y = 2{,}6$ **h.** $x = 5{,}2$ et $y = 4{,}8$

Traduction d'un problème en système

8 **a.** $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 7 \end{cases}$; $x = 5$ et $y = -2$; ces deux nombres sont 5 et – 2.

b. $\begin{cases} 2x + 3y = 11{,}50 \\ 3x + y = 8{,}50 \end{cases}$; $x = 2$ et $y = 2{,}5$; un café vaut 2 € et un chocolat 2,50 €.

c. $\begin{cases} 2x + y = 74{,}30 \\ x + 3y = 73{,}40 \end{cases}$; $x = 29{,}9$ et $y = 14{,}5$; conclusion : un bidon de 1 L vaut 14,50 € et un bidon de 5 L coûte 29,90 €.

9 Le problème se traduit par le système suivant :
$\begin{cases} x + y = 32 \\ 3x + 5y = 120 \end{cases}$.

QCM : Testez-vous !

1. C $x = 1$ et $y = -1$.

2. A $x = 1{,}3$ et $y = 0{,}9$.

3. B $\begin{cases} x + y = 200 \\ 8x + 12y = 2\,080 \end{cases}$.

4. A $\begin{cases} 1{,}5x - y = 2 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$: chaque membre de la première équation a été divisé par 2.

5. C $M(1\ ;5)$: $3x + 2 = -x + 6$ donc $4x = 4$, soit $x = 1$; on remplace x dans l'une des équations, on obtient : $y = 3 \times 1 + 2 = 5$.

Problèmes

10 Un bon plan

1. $25x + 18y = 2\,315$

2. $0{,}1 \times 25x + 0{,}12 \times 18y = 237{,}8$
soit $2{,}5x + 2{,}16y = 237{,}8$.

3. Les solutions sont $x = 80$ € et $y = 17{,}5$ €.

11 Prix soldés

x = prix du pull non soldé et y = prix du pantalon non soldé.

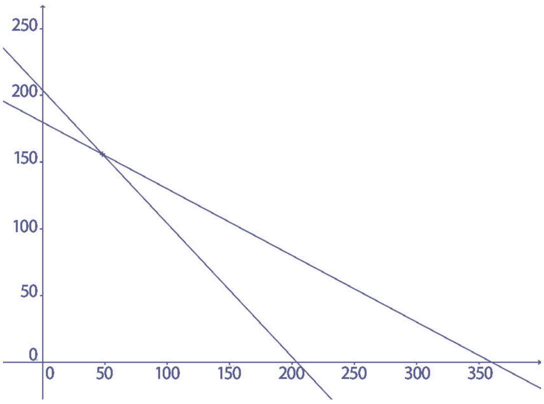
$$\begin{cases} x + y = 104{,}6 \\ 0{,}75x + 0{,}65y = 71{,}32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 33{,}3 \\ y = 71{,}3 \end{cases}$$

12 Distributeur automatique de billets

1. Non ce n'est pas possible car $102 \times 10 + 102 \times 20 = 3\,060$ €.

2. a. $\begin{cases} y = -x + 204 \\ y = -0{,}5x + 180 \end{cases}$

b. Solution (48 ; 156).



13 Formation des prix

$x = Pv$ et $y = Mb$; $\begin{cases} x - y = 2\,550 \\ y = 0{,}15x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3\,000 \text{ €} \\ y = 450 \text{ €} \end{cases}$

14 Plateaux de fruits de mer

1. $x + y = 42$

2. $22x + 34y = 1\,092$

3. 28 plateaux « découverte » et 14 plateaux « royal ».

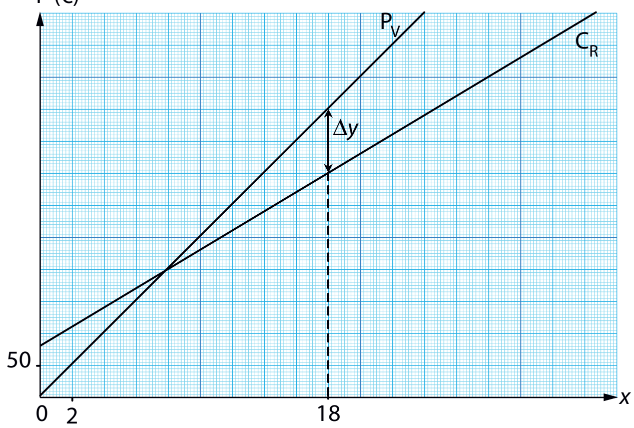
15 Fixation d'un prix

Soit x le nombre de tee-shirts, C_R le coût de revient et P_V le prix de vente.

1. $C_R = 15x + 80$

2. $P_V = 25x$

3.



4. $\Delta y = 10$ pour $x = 18$

5. $P_V - C_R = \Delta y \times 15x + 80 - 25x = 100 \Rightarrow x = 18$

16 Véhicule utilitaire

1. $y = 1\,500x + 30\,000$

2. $z = 1\,875x + 28\,500$

3. $x = 4$ ans et $y = 36\,000$ €

4. Voir écran page suivante.

5. Pour une durée d'utilisation inférieure à 4 ans, on choisit le second véhicule. Pour une durée supérieure à 4 ans, le premier est plus économique.

17 Choix d'une chaudière

1. Soit x le nombre d'années d'utilisation et y le coût de fonctionnement de la chaudière.
On obtient le système suivant pour les deux chaudières :

$$\begin{cases} y = 1\,240 + 800 \times 0{,}85 \times x \\ y = 2\,640 + 800 \times 0{,}6 \times x \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} y = 1\,240 + 680x \\ y = 2\,640 + 480x \end{cases}$$

On obtient comme solution (7 ;6000)

2. Oui c'est rentable car $12 > 7$

Démarche d'investigation

18 Du prix fournisseur au prix magasin

Soit x le prix d'un écran plat et y le prix d'un lecteur Blu-ray.

$$\begin{cases} 6x + 4y = 4\,120 \\ 0{,}9 \times 6x + 0{,}8 \times 4y = 3\,656 \end{cases} \text{ solution } \begin{cases} x = 600 \text{ €} \\ y = 130 \text{ €} \end{cases}$$

En appliquant la marge de 30%

Prix de vente TTC écran = $600 \times 1{,}3 = 780$ €

Prix de vente TTC lecteur Blu-ray = $130 \times 1{,}3 = 169$ €

19 Jeux d'enfants

Soit x le nombre de billes du premier, y le nombre de billes du deuxième :

$x + 1 = y - 1$; $2(x - 1) = y + 1$ donc $x = 5$ et $y = 7$

20 Boulangerie

x = prix de la farine pour pain blanc
y = prix de la farine bio.

$$\begin{cases} 1\,200x + 800y = 3\,320 \\ 1\,400x + 1\,000y = 4\,020 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1,3 \\ y = 2,2 \end{cases}$$

21 Recherche d'un coût

Si x est le tarif de location d'un VTT et y celui d'une voiturette, les données permettent d'écrire :

$$\begin{cases} 4x + 2y = 148 \\ 3x + y = 86 \end{cases}$$. La résolution est le couple (12 ; 50).

Pour louer deux voiturettes et trois VTT, le groupe devra $3 \times 12 + 2 \times 50$ soit 136 €.

22 Ferronnerie d'art

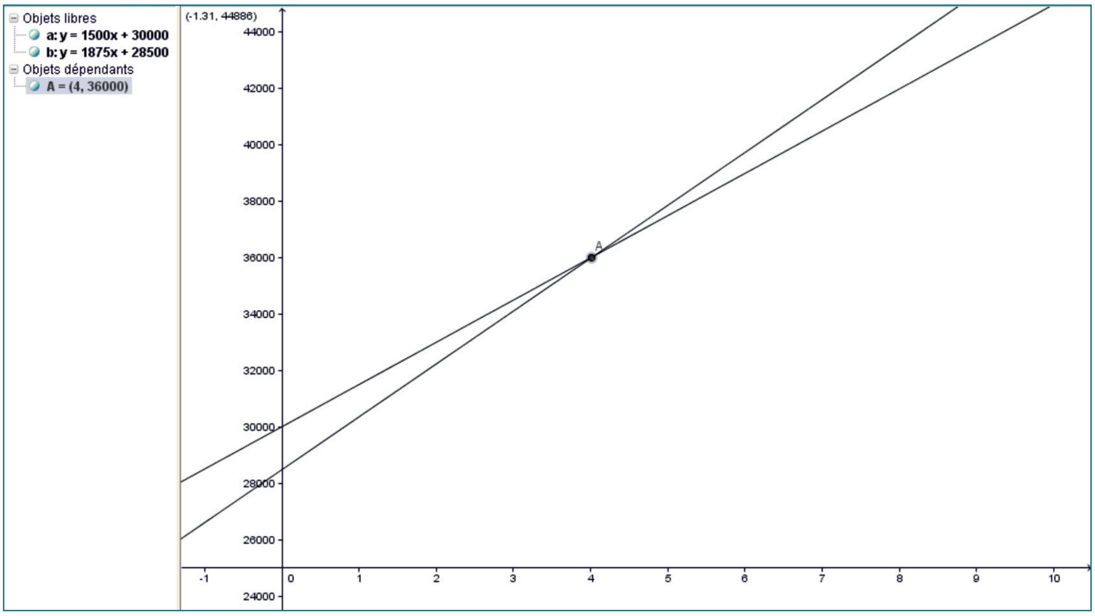
Prix du troisième bouquet : 90 €.

23 Cuisine à composer

L'agencement 2 caissons avec une porte et 2 caissons sans porte coûtera 156 €.

16 Véhicule utilitaire

4. Écran mentionné page précédente :



6 NOTION DE FONCTION

Capacités	Connaissances
• Utiliser une calculatrice ou un tableur grapheur pour obtenir, sur un intervalle : – l'image d'un nombre réel par une fonction donnée (valeur exacte ou arrondie) ; – un tableau de valeurs d'une fonction donnée (valeurs exactes ou arrondies) ; – la représentation graphique d'une fonction donnée. • Exploiter une représentation graphique d'une fonction sur un intervalle donné pour obtenir : – l'image d'un nombre réel par une fonction donnée ; – un tableau de valeurs d'une fonction donnée. • Décrire les variations d'une fonction avec un vocabulaire adapte ou un tableau de variation.	• Vocabulaire élémentaire sur les fonctions : – image ; – antécédent ; – croissance, décroissance ; – maximum, minimum.

L'objectif de ce chapitre est de voir (ou revoir) en situation le vocabulaire des fonctions. Il est avant tout fondé sur la représentation graphique à construire ou à exploiter pour étudier les variations des fonctions et tracer des tableaux de variation. On peut utiliser tout type de fonction tant qu'aucune connaissance spécifique concernant des fonctions hors programme n'est demandée.
Comme dans la plupart des chapitres, l'important n'est pas de développer une quelconque virtuosité dans la construction de tableaux de variation ou la connaissance des fonctions abordées mais bien d'utiliser les notions étudiées afin de résoudre des problèmes. C'est pour cette raison que les fonctions y sont souvent introduites comme modèles de situations. Une large place est faite aux tableurs grapheurs et aux possibilités qu'ils offrent pour la résolution.

Activité 1 : Combien de créations et défaillances d'entreprises en France ?

1. L'élève a le droit de se tromper sur cette réponse s'il n'analyse pas la double échelle en ordonnée.

2. Défaillances en 2009 : environ 60 milliers d'entreprises.

3. Créations en 2002 : environ 210 milliers d'entreprises.

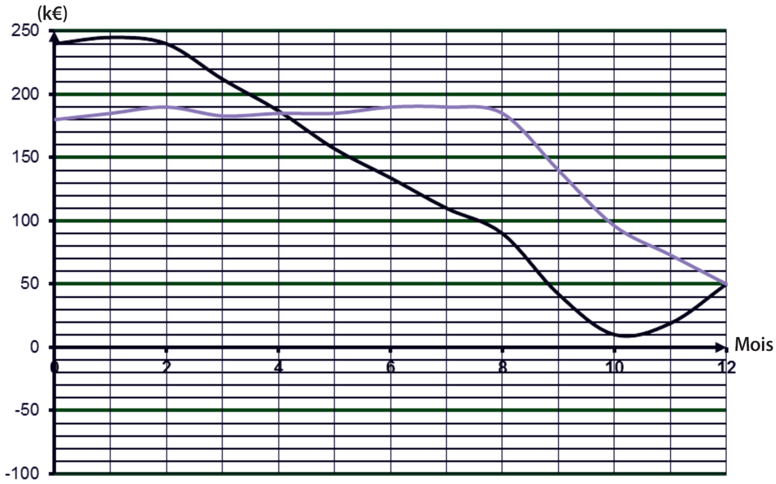
4. La courbe des créations d'entreprises est toujours au-dessus de celle des défaillances, voir la double échelle en ordonnée. Question 2 maximum des défaillances, question 3 minimum des créations.

Activité 2 : Chiffre d'affaires et charges d'une entreprise

1. a. Le chiffre d'affaires du 1er mois est de 245 k€ et de 50 k€ pour le 12^{e} mois.

b. Après une légère hausse (croissance) les 2 premiers mois, le chiffre d'affaires a chuté (décroissance) pendant 9 mois et il repart à la hausse ces 3 derniers mois.

2. Représentation des charges en fonction du nombre de mois :



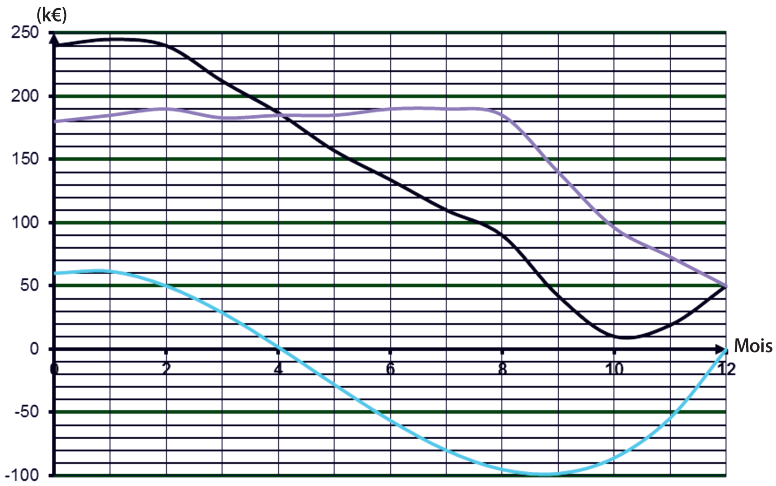
3. L'entreprise à un chiffre d'affaires supérieur aux charges pendant les 5 premiers mois, ce qui correspond à un bénéfice ; puis les charges deviennent supérieures au chiffre d'affaires les 8 derniers mois, ce qui correspond à un déficit.

Activité 3 : Résultat d'une entreprise

1. a.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(x)$	60	61,6	50	28,8	1,6	– 28	– 56,4	– 80	– 95,2	– 98,4	– 86	– 54,4	0

b.



2. Pendant les 5 premiers mois le résultat est positif (bénéfice) puis il est négatif les 8 derniers mois.

3. A partir du 5^{e} mois, le résultat de l'entreprise est négatif, ce qui correspond à un déficit (les charges sont supérieures au chiffre d'affaires).

Travaux pratiques

Comment obtenir le meilleur bénéfice ?

1. Choix d'une méthode

a. Si 5 000 pièces sont fabriquées sur le site A, sur le site B, il faut fabriquer :

$$8\,000 - 5\,000 = 3\,000 \text{ pièces.}$$

b. $z = 80 - x$ puisque x et z sont exprimés en centaines de pièces.

c. Pour répondre à la question que se pose le directeur, en utilisant un tableur, on peut calculer les somme des bénéfices correspondant à tout x de [20 ; 60] (on peut partir de $x = 20$ car z ne peut excéder 60). Pour cela il faudra entrer, dans une colonne, toutes les valeurs de 20 à 60 par cliquer-glisser à partir de la sélection de (20 ; 21). Dans la colonne suivante, on pourra calculer les valeurs correspondantes de z, puis calculer le bénéfice total de chacune des fabrications possibles en utilisant la somme des fonctions f et g. On cherchera ensuite, dans la liste, la fabrication qui donne le meilleur bénéfice.

x	z	bénéfice
20	60	97
21	59	97,18
22	58	97,32
23	57	97,42
24	56	97,48
25	55	97,5
26	54	97,48
27	53	97,42
28	52	97,32
29	51	97,18
30	50	97
31	49	96,78
32	48	96,52
33	47	96,22

…

x	z	bénéfice
34	46	95,88
35	45	95,5
36	44	95,08
37	43	94,62
38	42	94,12
39	41	93,58
40	40	93
41	39	92,38
42	38	91,72
43	37	91,02
44	36	90,28
45	35	89,5
46	34	88,68
47	33	87,82

…

x	z	bénéfice
48	32	86,92
49	31	85,98
50	30	85
51	29	83,98
52	28	82,92
53	27	81,82
54	26	80,68
55	25	79,5
56	24	78,28
57	23	77,02
58	22	75,72
59	21	74,38
60	20	73

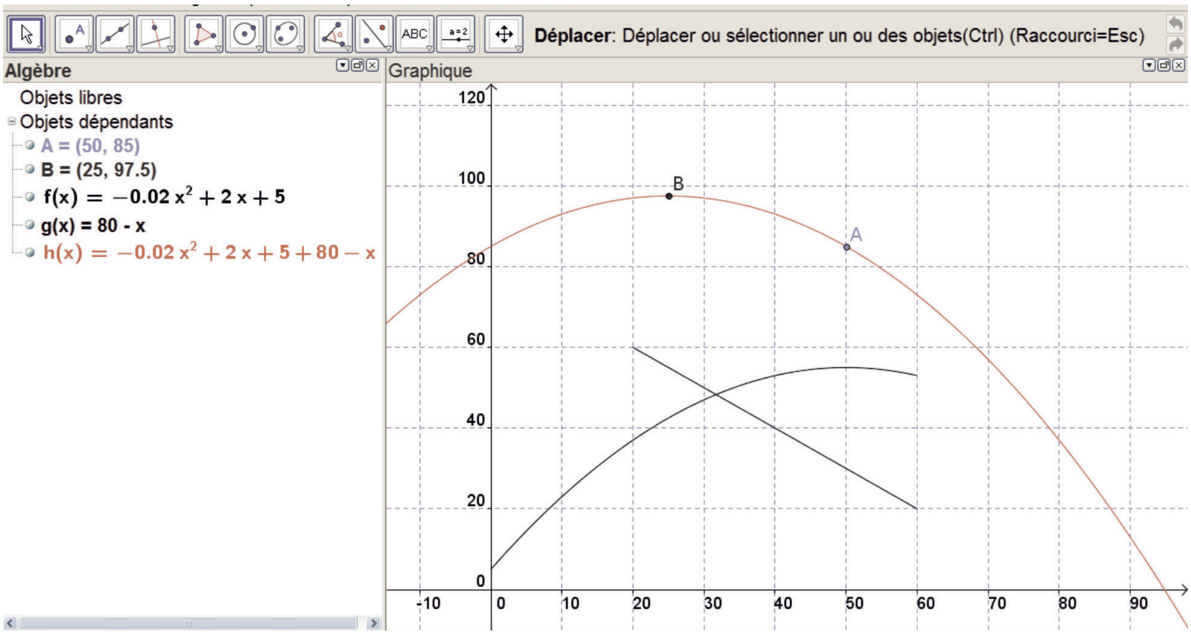
d. À partir des valeurs obtenues à l'aide du tableur, le nombre x de centaines de pièces qu'il faut fabriquer sur le site A pour réaliser le meilleur bénéfice semble être 25.

2. Utilisation de la fonction modélisant le bénéfice total

a. La fonction qui représente le bénéfice total en fonction du nombre x de centaines de pièces fabriquées sur le site A s'écrit : $h(x) = f(x) + g(z) = -0{,}02x^2 + 2x + 5 + z = -0{,}02x^2 + 2x + 5 + 80 - x$.

Donc $h(x) = -0{,}02x^2 + x + 85$.

b.



c. Tableau de variation de la fonction h.

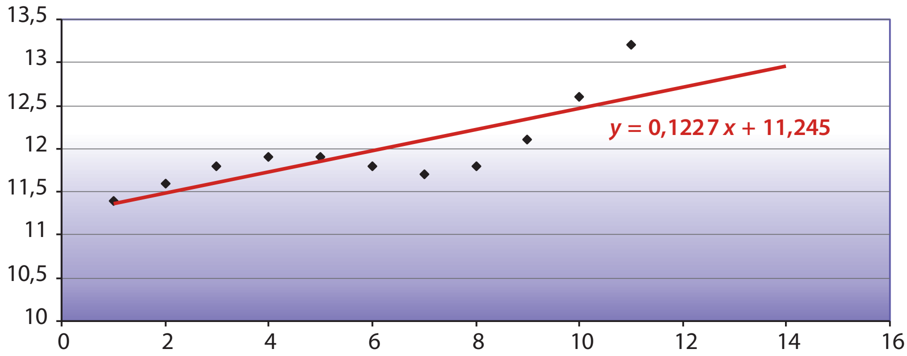
x	20	25	60
$h(x)$	97	97,5	73

d. D'après le tableau de variation, le bénéfice est bien maximum pour $x = 25$ centaines de pièces.

Quelle sera la température moyenne en France en 2031-2040 ?

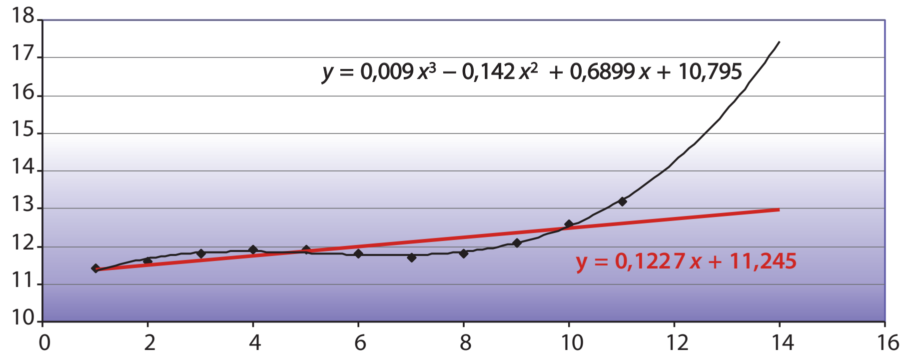
1. Obtention des modèles

a.



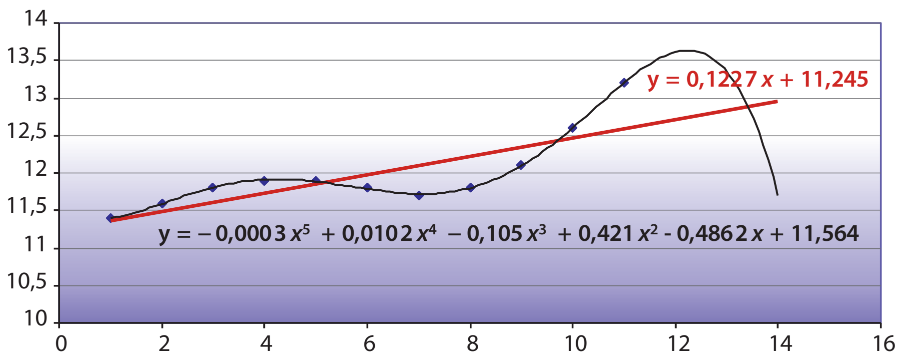
On trouve donc avec le « modèle linéaire » : $f(x) = 0{,}1227x + 11{,}245$.

b.



Avec le modèle polynomial de degré 3, on trouve :

$$g(x) = 0{,}009x^3 - 0{,}142x^2 + 0{,}6899x + 10{,}795.$$



Avec le modèle polynomial de degré 5, on trouve :

$$h(x) = -0{,}0003x^5 + 0{,}0102x^4 - 0{,}105x^3 + 0{,}421x^2 - 0{,}4862x + 11{,}564.$$

2. Comparaison des modèles

a. Tableaux de variation des fonctions f, g et h :

x	1		14
$f(x)$	11,4	↗	13

x	1		4		7		14
$g(x)$	11,4	↗	11,9	↘	11,7	↗	17,3

x	1		4		7		12		14
$h(x)$	11,4	↗	11,9	↘	11,7	↗	13,7	↘	11,7

b. D'après les résultats obtenus, le modèle choisi par l'organisme B semble être celui qui est décrit par la fonction g.

c. Tout modèle correctement argumenté pourra être accepté.

Exercices

Définition d'une fonction

1 **a.** L'image par la fonction *f* de – 3 est 3.
b. L'image par la fonction *f* de 1 est – 1.
c. L'image par la fonction *g* de 0 est 2.
d. L'image par la fonction *h* de 4 est – 1,5.
e. L'image par la fonction *g* de 2 n'existe pas.

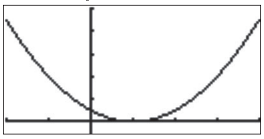
2

x	– 4	– 3	– 2	– 1	0
g (*x*)	2	– 0,7	– 2	– 0,7	2

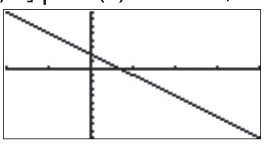
3 **a.** L'antécédent de – 2 par la fonction *g* est – 2.
b. L'antécédent de 0 par la fonction *h* est 1.
c. L'antécédent de – 1 par la fonction *f* est 1.
d. Les antécédents de 1 par la fonction *g* sont – 0,3 et – 3,7.

Représentation graphique d'une fonction

4 Représentation graphique de la fonction *f*, définie sur l'intervalle [– 2 ; 4] par $f(x) = x^2 - 2x + 1$:



5 **a.** Représentation de la fonction *f* définie sur l'intervalle [– 3 ; 5] par $f(x) = -3x + 2$:

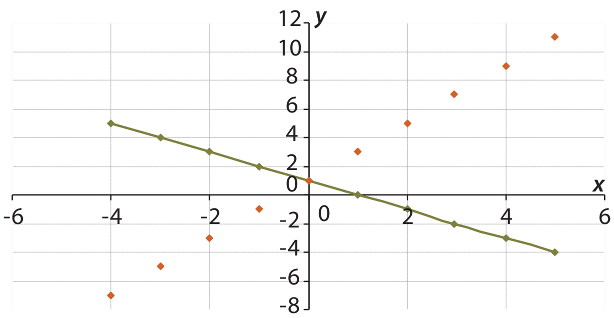


b. Il n'y a pas d'image pour 12car 12 n'appartient pas à l'intervalle sur lequel la fonction *f* est définie.

6 Tableau de valeurs de la fonction *g* :

x	– 4	– 3	– 2	– 1	0	1	2	3	4	5
$g(x) = 2x + 1$	– 7	– 5	– 3	– 1	1	3	5	7	9	11

Représentation graphique de *f* et *g*



Remarque : Rien n'autorise à tracer la droite reliant les points donnés dans le tableau de valeurs de *f*.

Sens de variations d'une fonction

7 Les fonctions *f* et *k* sont croissantes, la fonction *g* est constante, la fonction *h* est décroissante.

8 **a.** La fonction *f* est décroissante sur [– 4 ; – 3] et sur [1 ; 4]. Elle est croissante sur [-3 ; 1].

b. La valeur de *t* pour laquelle la fonction admet un maximum est *t* = 1. La valeur de ce maximum est 2,5.

9 Tableaux de variation des trois fonctions *f*, *g*, *h*.

x	–5		–3		1		5
f(*x*)	1	↗	3	↘	–1	↗	1

x	–4		–2		0
g(*x*)	2	↘	–2	↗	2

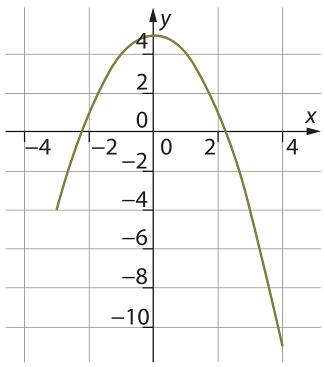
x	–5		5
h(*x*)	3	↘	–2

10 La fonction *f* admet un maximum égal à 3 pour *x* = – 3 et un minimum égal à (– 1) pour *x* = 1. La fonction *g* admet un minimum égal à (– 2) pour *x* = 2.

11 **a.** Tableau de variation

x	–3		**0**		**4**
f (*x*)	**–4**	↗	**5**	↘	**–11**

b. Allure de la fonction *f*



12 **a.**

x	–1		2,5
h(*x*)	–7	↗	4,3

b. La fonction n'admet pas de maximum car elle n'est pas successivement croissante puis décroissante sur l'intervalle.
c. La fonction n'est pas strictement croissante puisqu'elle présente un palier pour *x* = 1.
d. La fonction est croissante sur [– 1 ; 0].

QCM : Testez-vous !

1. B. 0

2. A. – 1

3. A. 6

4. A. – 17

5. C. croissante

6. C. aucun extremum

7. A. 5

8. B. 0 et 2

9. C. – 2

10. C. n'existe pas : la fonction n'est pas définie en 5.

11. A. décroissante

12. A. un minimum : pour $x = 1$

Problèmes

13 Taux de fécondité

1.

x	15		28		49
Variations du taux de fécondité en 1997	0	↗	140	↘	0

x	15		30		49
Variations du taux de fécondité en 2007	0	↗	150	↘	0

2. 1997 : taux max = 140 à 28 ans.
2007 : taux max = 150 à 30 ans.

3. Le taux est nul.

4. Après 28 ans, celui de 2007 est supérieur à celui de 1997.
Avant 28 ans, ils sont quasiment identiques.

5. Le taux de fécondité en 10 ans a augmenté, mais on remarque aussi que l'on fait des enfants de plus en plus tard.

14 Évolution comparée de CAC 40 et du Nikkei

1. CAC 40 → maximum 6 100 en mai 2007
Nikkei → maximum 17 400 en juin 2007

2. France → la crise s'est amorcée en juin 2007 et s'est aggravée en janvier 2008 (juin 2008 : réponse acceptable).
Japon → la crise s'est amorcée en juillet 2007 et s'est aggravée en janvier 2008 (juin 2008 : réponse acceptable).

3. Non car la valeur des indices ne remonte pas.

4. Décembre 2008 → CAC 40 : 3 200 et Nikkei : 8 900

5. CAC 40 : -48 % Nikkei : -49 %

6. Le Japon a très légèrement plus souffert que la France.

15 Quel délai avant de conduire ?

1. Eléments de l'énoncé qui permettent de répondre aux questions posées :

En France un conducteur est en infraction s'il conduit avec un taux d'alcool supérieur ou égal à 0,5 gramme par litre de sang. Conduire avec un taux d'alcool compris entre 0,5 et 0,79 g/L de sang constitue une contravention. Conduire avec un taux d'alcool supérieur ou égal à 0,8 g/L constitue un délit. Le taux maximum pourrait être ramené à 0,2 g/L pour les jeunes conducteurs.

2. Sur le graphique, on relève les maxima de taux d'alcoolémie, puis l'heure à laquelle le taux revient à zéro.

3. Tracer la droite d'équation $y = 0{,}5$ sur le graphique permet de déterminer l'intervalle horaire pendant lequel les conducteurs sont en infraction. Ce sont les intervalles pour lesquels, les courbes sont au-dessus de la droite.

4. • Du point de vue de la législation, si ces hommes reprennent le volant, celui qui a consommé au cours d'un repas est en contravention vis-à-vis de la loi et celui qui est à jeun commet un délit.

• Un jeune conducteur commettrait un délit dans les deux cas.

• Du point de vue de la loi, le conducteur ayant mangé peut reprendre le volant à partir de 23 h 00 et celui qui est resté à jeun à partir de 1 h 30. Cependant, pour des raisons évidentes de sécurité, mieux vaut attendre 2 h 00 du matin pour celui qui a pris un repas et beaucoup plus tard pour celui qui est resté à jeun.

16 Bolt franchira-t-il la barre des 9,50 s ?

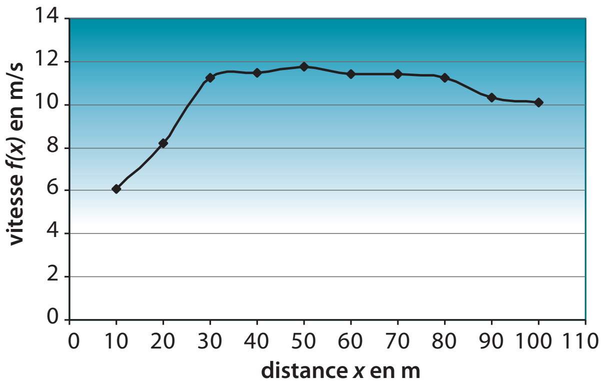
1.

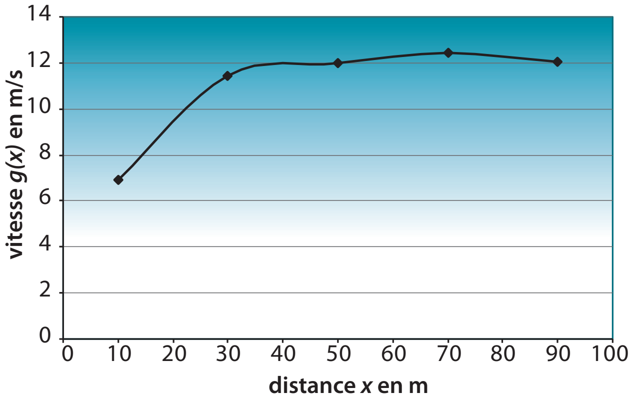
Intervalles (m)	[0 ; 20[	[20 ; 40[	[40 ; 60[	[60 ; 80[	[80 ; 100]
Temps de parcours de l'intervalle (s)	2,89	1,75	1,67	1,61	1,66

Intervalles (m)	[0 ; 20[	[20 ; 40[	[40 ; 60[	[60 ; 80[	[80 ; 100]
Vitesse v au centre de l'intervalle (m/s)	6,92	11,43	11,98	12,42	12,05
Vitesse v (km/h)	24,91	41,14	43,11	44,72	43,37

2. Le calcul des vitesses de la course de 2009 confirme bien une pointe de vitesse à 44,72 km/h entre 60 et 80 mètres. Cette pointe en termes mathématiques est appelée « maximum de la fonction g ».

3.





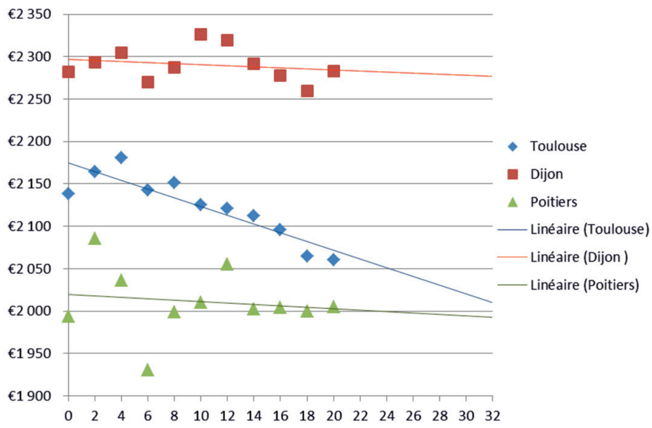
4. La courbe représentative de f représente les variations de la vitesse de Bolt à Pékin. La fonction f est croissante jusqu'à 50 m, distance à laquelle elle passe par un maximum, puis décroissante ensuite. On peut cependant considérer qu'elle est presque constante entre 30 m et 80 m.

La courbe représentative de g représente les variations de la vitesse de Bolt à Berlin. La fonction g est croissante jusqu'à 70 m, distance à laquelle elle passe par un maximum, puis décroissante ensuite. On peut cependant considérer qu'elle est presque constante entre 40 m et 90 m. Elle est très peu décroissante.

5. Toute suggestion argumentée peut être considérée, par exemple, « Conseil à Usain Bolt pour lui permettre de passer en-dessous de la barre des 9,50s : travailler le début de course pour atteindre plus rapidement le palier de vitesse (et grappiller ainsi les quelques centièmes manquants) puis maintenir cette vitesse comme à Berlin. »

17 Le prix de l'immobilier

1. 2. a. b.



c. Pour Toulouse, la courbe de tendance linéaire convient (points approximativement alignés), par contre une telle courbe d'ajustement linéaire convient moins pour Dijon et ne convient pas du tout pour Poitiers.

d. Prévision pour juin 2013 (rang du mois 24) :

Toulouse → 2 050 €
Dijon → 2 280 €
Poitiers → Imprévisible avec un ajustement linéaire

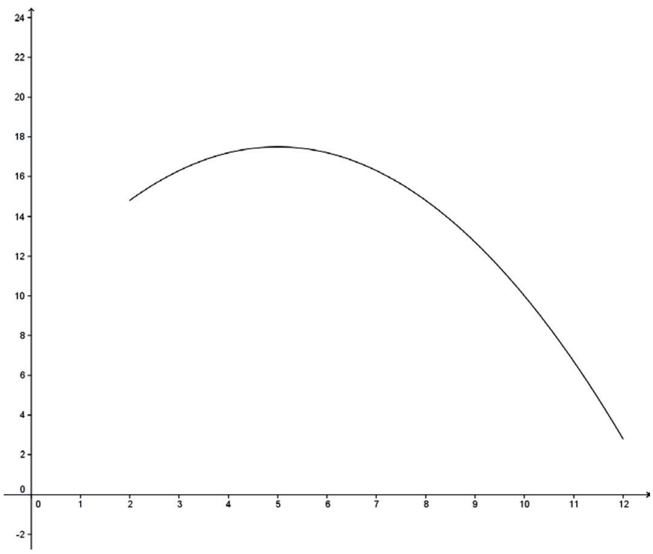
3. Il est difficile de faire correspondre un modèle mathématique de type « linéaire » au prix moyen du m^2 d'appartements. Le prix de l'immobilier est très fluctuant et totalement différent d'une ville à une autre.

On peut néanmoins constater :

- une baisse du prix du m^2 pour Toulouse ;
- un prix au m^2 beaucoup plus élevé à Dijon qu'à Poitiers.

18 Demande et chiffre d'affaires

1. a.



b. Maximum : (5 ; 17,5).

c. Pour 5€, la demande sera de 17,5 milliers d'unités.

d. CA = 17,5 × 5 = 87,5 milliers d'€.

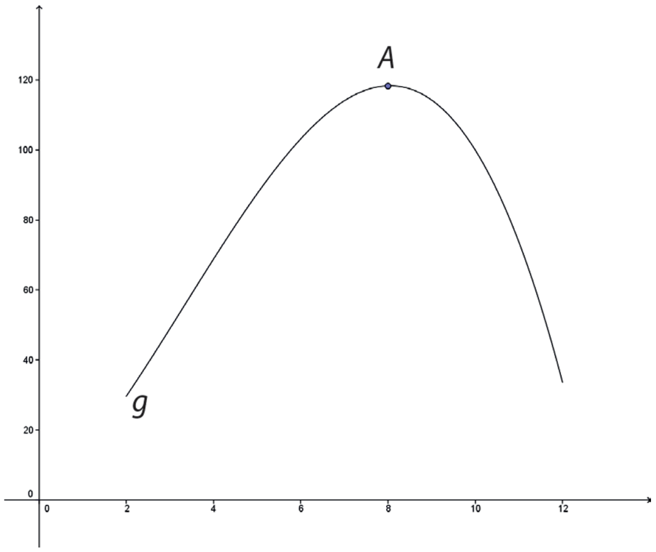
e.

x	2		5		12
Variations de $f(x)$			17,5		
	14,8	↗		↘	2,8

2.

a. $g(x) = f(x) \times x = -0{,}3x^3 + 3x^2 + 10x$

b.



c. Maximum (8 ; 118,4).

Pour un prix unitaire de 8 €, le chiffre d'affaires sera maximal à 118,4 milliers d'€.

d.

x	2		8		12
Variations de $g(x)$			118,4		
	29,6	↗		↘	33,6

3. On remarque que le prix unitaire pour une demande maximale n'est pas le même que pour un CA maximal. L'entreprise a tout intérêt à privilégier le chiffre d'affaires maximum et donc vendre son produit 8€.

Démarche d'investigation

19 Avion ou voiture ?

1. On relève la consommation pour 100 km et par passager en 2020 sur le graphique. On calcule la consommation de la voiture pour 100 km par passager. On compare les deux consommations puisque les deux carburants, à volumes égaux, provoquent la même quantité de CO_2.

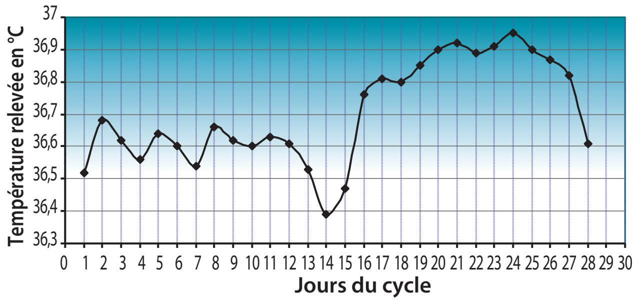
2. En avion, CPK en 2020 : 2,7 L/passager/100 km.

En voiture, CPK en 2020 : $\frac{6}{3} = 2$ L/passager/100 km.

La voiture transportant 3 passagers restera donc moins polluante que l'avion dans ces conditions d'utilisation.

20 Fécondité maximale

Pour visualiser la période de fécondité maximale, on peut représenter graphiquement le tableau de valeur. On déterminera ensuite visuellement le maximum de la courbe obtenue et on définira un intervalle de 7 jours centré sur ce maximum.

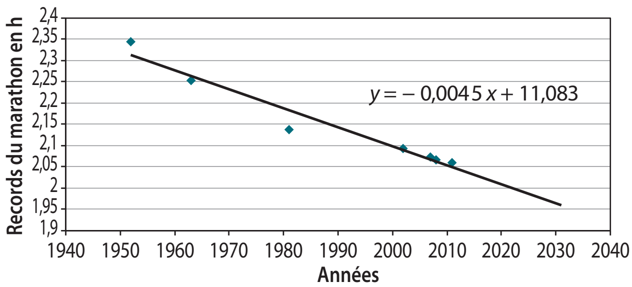


Le minimum est obtenu le 14e jour. La période de fécondité maximale est donc comprise entre le 11e et le 18e jour du cycle.

21 Jusqu'où iront les marathoniens ?

1. Pour déterminer approximativement la décennie au cours de laquelle le record des 2 heures risque d'être atteint, on peut représenter graphiquement le tableau de valeurs à l'aide d'un tableur. Pour obtenir davantage de fiabilité, on peut commencer seulement à partir de 1950. On déterminera ensuite une courbe adaptée pour modéliser la progression des records. Sur cette courbe, on lira la décennie qui correspond au passage des records en-dessous de 2 h 00.

2.



3. D'après le modèle affine choisi pour les records établis à partir de 1952, il semblerait que la barre des 2 heures puisse être franchie entre 2020 et 2030. Cette méthode est cependant peu fiable car rien ne permet d'affirmer que la progression des records est de type affine.

22 L'effet du sport sur la condition physique

1. Les valeurs à relever pour étayer l'argumentation sont le maximum de chaque fonction et les âges qui correspondent à la limite de l'incapacité fonctionnelle.

Âge	0		20		70
V_{O_2max} Sédentaire	40	↗	50	↘	15

Âge	0		25		103
V_{O_2max} Sportif	40	↗	63	↘	15

2. Le volume d'oxygène maximal est plus élevé chez le sportif : 63 mL/kg/min contre 50 mL/kg/min pour l'homme sédentaire. Ce maximum est retardé de 5 ans chez le sportif puisqu'il est obtenu pour 25 ans au lieu de 20 ans pour l'homme sédentaire.

La limite d'incapacité fonctionnelle (15 mL/kg/min) est atteinte à 70 ans chez l'homme sédentaire alors qu'elle n'est atteinte qu'à 103 ans chez le sportif.

7 FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

Capacités	Connaissances
• Sur un intervalle donné, étudier les variations et représenter les fonctions de référence $x \mapsto 1$, $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$.	• Sens de variation et représentation graphique des fonctions de référence sur un intervalle donné : $x \mapsto 1$, $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$.
• Représenter les fonctions de la forme $x \mapsto x + k$, $x \mapsto x^2 + k$, $x \mapsto k$, $x \mapsto k\,x$, $x \mapsto k\,x^2$ où k est un nombre réel donne. • Utiliser les TIC pour conjecturer les variations de ces fonctions.	• Sens de variation et représentation graphique des fonctions de la forme $x \mapsto x + k$, $x \mapsto x^2 + k$, $x \mapsto k$, $x \mapsto k\,x$, $x \mapsto k\,x^2$ où k est un nombre réel donné.
• Représenter une fonction affine. • Déterminer le sens de variation d'une fonction affine. • Déterminer l'expression algébrique d'une fonction affine a partir de la donnée de deux nombres et de leurs images. • Déterminer par calcul si un point M du plan appartient ou non a une droite d'équation donnée.	• Fonction affine : – sens de variation ; – représentation graphique ; – cas particulier de la fonction linéaire, lien avec la proportionnalité. • Équation de droite de la forme $y = a\,x + b$.
• Résoudre graphiquement une équation de la forme $f(x) = c$ où c est un nombre réel et f une fonction affine ou une fonction de la forme $x \mapsto x^2 + k$, $x \mapsto kx^2$ où k est un nombre réel donné.	• Processus de résolution graphique d'équations de la forme $f(x) = c$ où c est un nombre réel et f une fonction affine ou une fonction de la forme $x \mapsto x^2 + k$, $x \mapsto kx^2$ où k est un nombre réel donné.

Ce chapitre, comme le précédent, permet d'utiliser des fonctions pour résoudre des problèmes. Il permet de se familiariser avec chacune des fonctions de référence, de connaître ses variations ainsi que l'influence d'un coefficient multiplicateur ou de l'ajout d'une constante sur ses variations. Il est important que l'élève puisse associer à chaque type de fonction l'allure de sa représentation graphique, et inversement. Ce chapitre est également l'occasion de préciser que la fonction linéaire est un cas particulier de fonction affine et de travailler sur la proportionnalité associée à la fonction linéaire.

Activité 1 : Veille sociale

1. $f(0) = 1\,000$; $f(40) = 1\,000$

2.

x	-15		20		45
Variations de $f(x)$	2650	$\searrow$	200	$\nearrow$	1450

3. 20 °C

4. Il doit augmenter ses effectifs sur [– 15 ; –2] et [42 ; 45].

5. L'organisme devra augmenter ses effectifs car il recevra théoriquement plus de 1 200 appels journaliers.

Activité 2 : Comment varie le bénéfice ?

1. Prix de vente HT d'un salon de jardin : 598/1,196 = 500 €.

2.

t	0		30
PvHT(t)	500	→	500

t			30
Cr(t)	200	↗	450

t			30
B(t)	300	↘	50

3. Changement de fournisseur dans 24 mois.

Activité 3 : Jeux télévisés : qui est gagnant ?

1. $f(x) = 1{,}3\,x$

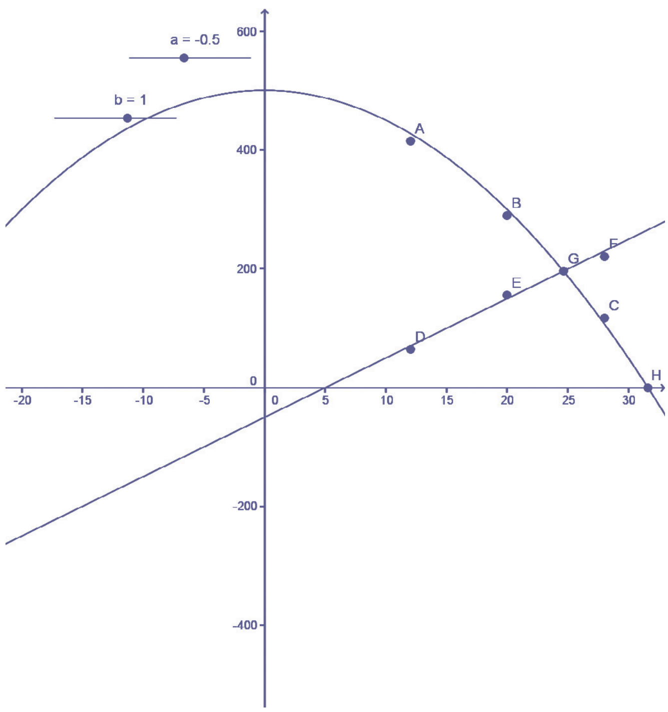
2. Elles sont proportionnelles.

3. $1{,}3\,x > 10\,000$

4. À partir de 7 693 appels.

Travaux pratiques

Quel est le prix d'équilibre ?



Encadrement : 20 € < prix d'équilibre < 28 €

1. a. Le curseur modifie l'orientation de la parabole :
- quand $a > 0$, la parabole est orientée vers le haut ;
- quand $a < 0$, la parabole est orientée vers le bas.

b. $f(x) = -0{,}5x^2 + 500$

c. À partir de 31,62 € la demande est nulle.

2. c. Le curseur modifie l'orientation de la droite :
- quand $a > 0$, la droite est croissante ;
- quand $a < 0$, la droite est décroissante.

d. $g(x) = 10\,x - 50$

e. Pour le prix de 5 €, l'offre est nulle.

3. a. Voir ci-contre.

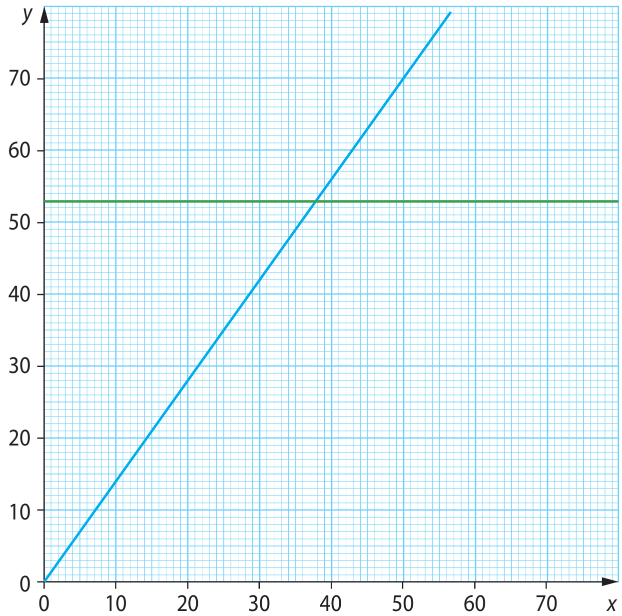
b. Prix d'équilibre = 24,64 €.

Quel tarif choisir ?

a. Expressions des fonctions :

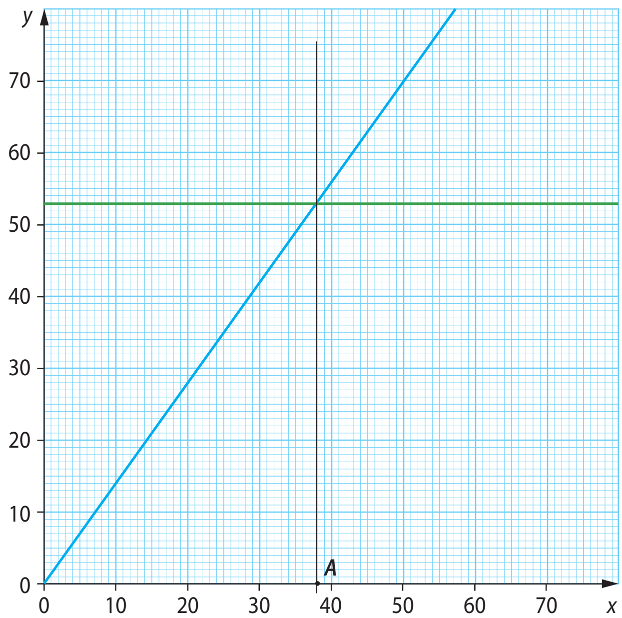
$$f(x) = 1{,}4\,x \text{ et } g(x) = 53$$

b. Représentation graphique des fonctions f et g : voir ci-dessous.



c. Les deux premières affirmations concernant le budget sont fausses puisque la fonction g n'est ni linéaire, ni croissante.

d. Le tarif le plus avantageux, s'il nage une fois par semaine pendant 36 semaines, est le tarif 1 : voir graphique ci-dessous.

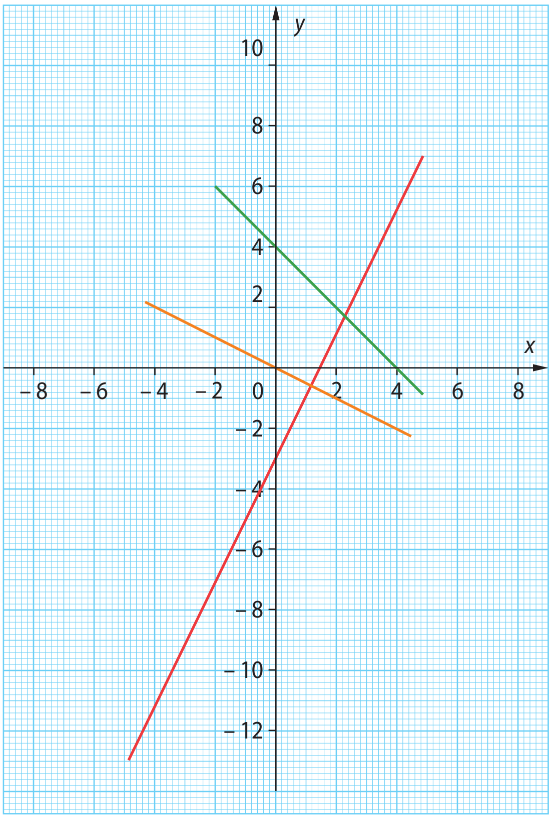


e. L'abonnement devient plus avantageux à partir de 38 entrées.

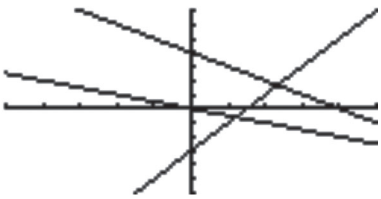
Exercices

Fonctions de référence

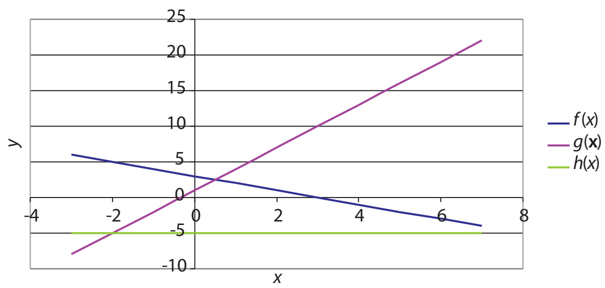
1



2 À la calculatrice :



3



4 On obtient les associations suivantes :

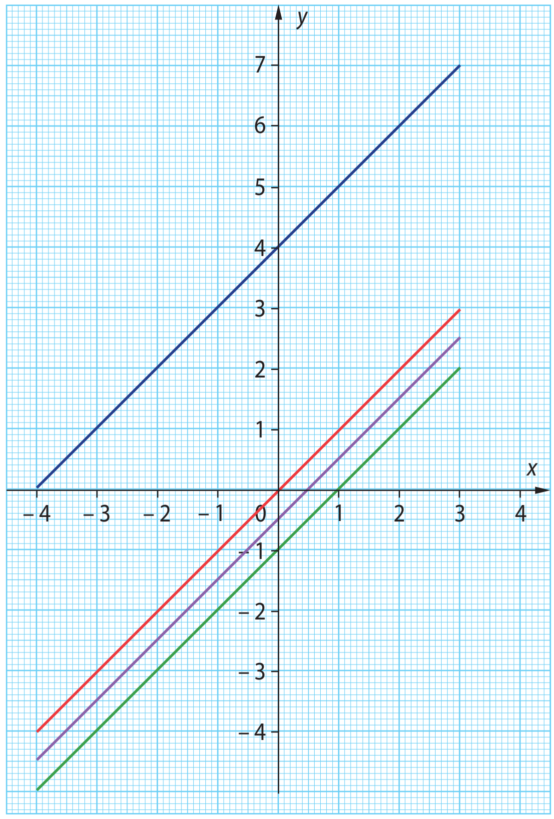
a. $x \mapsto x + 1$ courbe n°4

b. $x \mapsto -4x + 5$ courbe n°2

c. $x \mapsto -\frac{1}{2}x$ courbe n°1

d. $x \mapsto 5$ courbe n°3

5 a. b.



c.

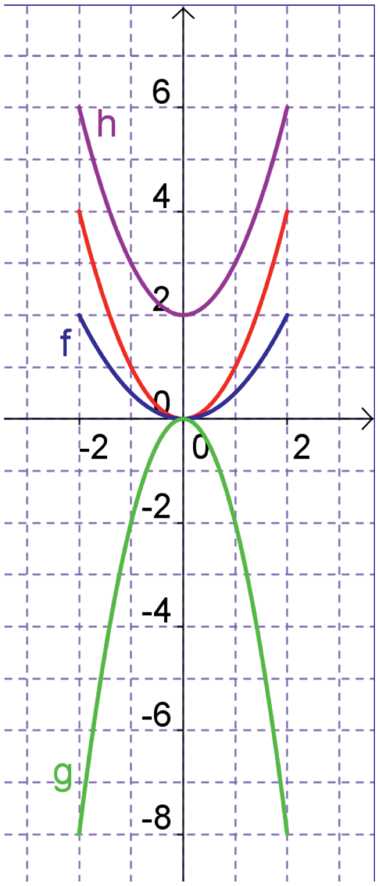
x	-4	3
x	-4	3

x	-4	3
$f(x)$	0	7

x	-4	3
$g(x)$	-5	2

x	-4	3
$h(x)$	$-4,5$	$2,5$

6 **a.**



b.

x	-2		0		2
$f(x)$	2	↘	0	↗	2

x	-2		0		2
$g(x)$	-8	↗	0	↘	8

x	-2		0		2
$h(x)$	6	↘	2	↗	6

7 On obtient les associations suivantes :

a. $x \mapsto 3x$ Courbe n°4

b. $x \mapsto -x+3$ Courbe n°2

c. $x \mapsto -x^2$ Courbe n°3

d. $x \mapsto \frac{1}{3}x^2 - 1$ Courbe n°1

Fonction affine

8 La fonction représentée par la droite n° 4 est une fonction croissante puisque x et y varient dans le même sens. Les fonctions représentées par les droites n° 1 et 2 sont des fonctions décroissantes puisque lorsque x augmente, la valeur correspondante de y diminue.

9 **a.** $x \mapsto x + 1$

x	-4		4
$f(x)$	-3	↗	5

b. $x \mapsto -4x + 5$

x	-4		4
$f(x)$	21	↘	-11

c. $x \mapsto -\frac{1}{2}x$

x	-4		4
$f(x)$	2	↘	-2

d. $x \mapsto 5$

x	-4		4
$f(x)$	5	→	5

Ces tableaux confirment les résultats de l'exercice **8** puisque la fonction repérée par **a.** correspond à la droite n°4, la fonction repérée par **b.** correspond à la droite n°2 et celle repérée par **c.** correspond à la droite n°1.

10 **a.** $A(-2\,;-2)\,;B(4\,;1)$

b. L'équation de la droite est de la forme $y = ax + b$ avec $a = \frac{1-(-2)}{4-(-2)} = \frac{1}{2}$. Donc $y = \frac{1}{2}x + b$. En utilisant les coordonnées de A, on obtient $-2 = \frac{1}{2} \times (-2) + b$, ce qui donne $b = -1$. Ces valeurs peuvent également être déterminées par lecture graphique. L'équation de la droite est donc : $y = \frac{1}{2}x - 1$.

c. L'expression de la fonction affine f est donc $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$.

d. E appartient à la droite car $f(8) = 3$. F n'appartient pas à la droite car $f(-5) = \frac{-7}{2} \neq -4$.

Fonction linéaire

11 Seule la fonction représentée par la droite n°1 met en relation des grandeurs proportionnelles car c'est la seule qui passe par l'origine du repère.

12 **a.** Les fonctions *f*, *h* et *t* sont des fonctions linéaires.
b. Lorsque la fonction est linéaire, les antécédents et leurs images sont des grandeurs proportionnelles.
c. La représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine du repère.

13 **a.** Seule la fonction *g* n'est pas linéaire car sa droite représentative ne passe pas par l'origine du repère.
b. Le coefficient de proportionnalité entre x et $f(x)$ est 2.

Résolution graphique d'équations de la forme $f(x) = c$

14 Solutions des équations :

a. $f(x) = 5$	$x = 4$
b. $f(x) = -3$	$x = 0$
c. $g(x) = -2$	$x = 0$
d. $g(x) = 2$	$x_1 = -2$ et $x_2 = 2$
e. $h(x) = 0$	$x = 0$
f. $h(x) = -2$	$x_1 = -2$ et $x_2 = 2$

15
a. Coordonnées des points d'intersection des courbes représentatives : $(-2 ; -2)$ et $(2 ; -2)$
b. Solutions de l'équation $f(x) = g(x)$: $x_1 = -2$ et $x_2 = 2$
c. Intervalle où $f(x) > g(x)$: $]-2 ; 2[$

d. Tableau de signe de la fonction $h(x) = f(x) - g(x)$ sur l'intervalle $[-3 ; 3]$

x	-3		-2		2		3
$h(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

QCM : Testez-vous !

1. C. carrée
2. B. linéaire
3. B. proportionnels
4. C. inversement proportionnels
5. A. une droite
6. C. une droite passant par l'origine du repère
7. B. une parabole
8. B. linéaire
9. B. décroissante
10. A. croissante
11. B. décroissante sur $[0 ; 5]$
12. B. décroissante sur $[0 ; 5]$
13. A. croissante sur $[0 ; 5]$

Problèmes

16 Ventes d'écrans LCD

1. a. Les deux suites de nombres sont proportionnelles puisque $\frac{30}{1} = \frac{60}{2} = \frac{90}{3} = \frac{120}{4}$.
b. $f(x) = 30x$
c. Si la progression était inchangée, les nombres de ventes d'écrans plats pour les mois 5 et 6 seraient : $f(5) = 150$ et $f(6) = 180$.

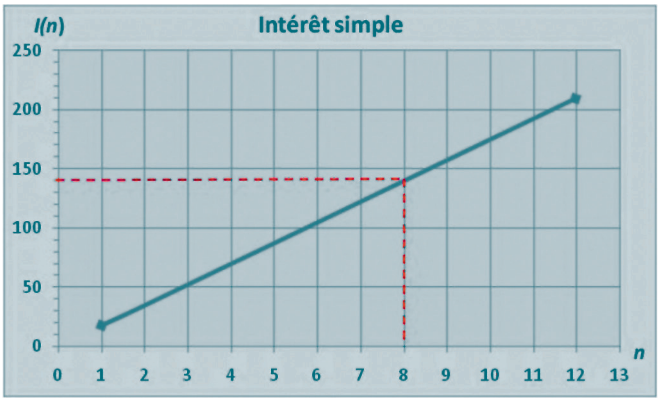
2. a. L'augmentation des ventes est divisée par deux pour les mois suivants, elle est donc égale à $\frac{30}{2} = 15$.
Les nombres de ventes réellement réalisées pour les mois 5 et 6 sont donc : $120 + 15 = 135$ et $135 + 15 = 150$.
b. $g(x) = 120 + 15(x - 4)$ c'est-à-dire $g(x) = 60 + 15x$.
c. On peut calculer le nombre d'écrans vendus le mois 4 avec cette fonction : $g(4) = 60 + 15 \times 4 = 120$.
d. En supposant que la progression des ventes se stabilise à ce niveau, le responsable peut espérer vendre : $g(12) = 240$ écrans le 12e mois de l'année.

17 Intérêts simples

1. $t = \frac{4,2}{12} = 0,35\ \%$
2. $I = Ctn = 3\,000 \times 0,0035 \times n \Rightarrow I = 17,5n$.
3. I définie sur l'intervalle $[1 ; 12]$ par $I(n) = 17,5n$.
a.

n	1	12
$I(n)$	**17,5**	**210**

b.

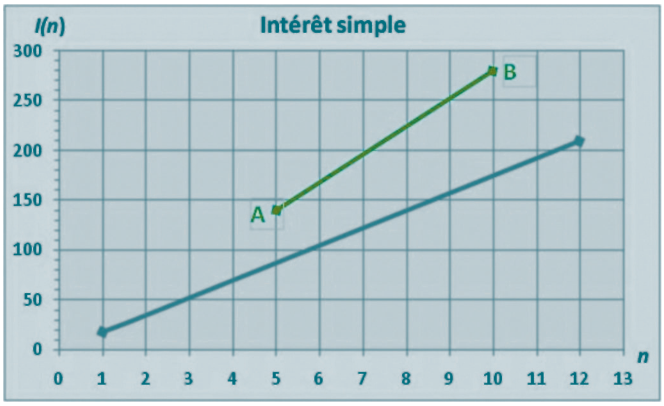


c. Pour avoir $I = 140$ €, $n = 8$ mois.

d. Par le calcul : $140 = 17{,}5n$ donc :

$$n = 140/17{,}5 = 8 \text{ mois.}$$

4. a.



b. Coefficient directeur de la droite (AB) :

$$a = (280 - 140) / (10 - 5) = 28.$$

On a donc : $I(n) = 28n$.

c. Nouveau capital C' :

$I = 28n$ et $I = Ctn$ d'où :

$$C' = 28n/0{,}0035n = 28/0{,}003\,5 = 8\,000 \text{ €.}$$

18 Prime professionnelle d'assurance

1. $C = 38\,000 \times \dfrac{x}{100} \Rightarrow C = 380x.$

2. $P = 40 + C \times \dfrac{x}{100} = 40 + 380x \times \dfrac{x}{100}$

$P = 3{,}8x^2 + 40$

3. $C(5) = 380 \times 5 = 1\,900$ €

$P(5) = 3{,}8 \times 5^2 + 40 = 135$ €

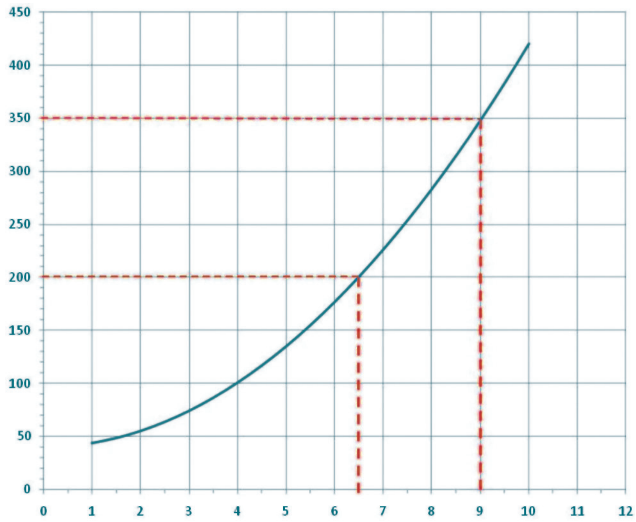
Rémunération nette : 1 900 – 135 = 1 765 €.

4. $P(x) = 253{,}75$ € $\Rightarrow x = 7{,}5$ %

5. a.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$	40	43,8	55,2	74,2	100,8	135	176,8	226,2	283,2	347,8	420

b.



6. $f(x) = 200 \Rightarrow x = 6{,}5$

$f(x) = 350 \Rightarrow x = 9$

7. Le taux doit se situer dans l'intervalle [6,5 ; 9].

19 Indice des prix à la consommation courante des ménages hors tabac

1. a. L'indication « base 100 en 1998 » signifie que l'indice 100, servant de référence, a été placé en 1998.

b. $x = 15$ € donne $y = \dfrac{124{,}2 \times x}{107{,}8} = 17{,}28$ € en 2012.

c. Prix z en janvier 2004 d'un produit coûtant en moyenne 20 € en juillet 2012 :

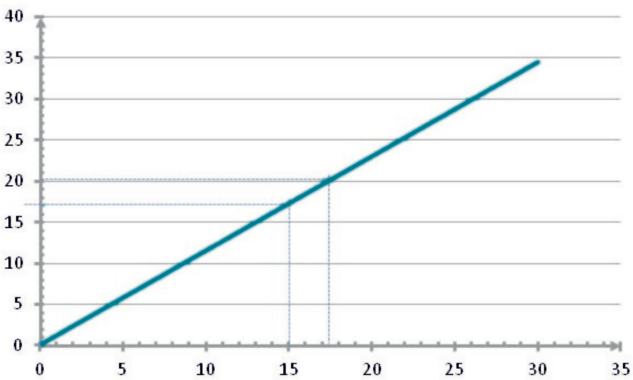
$$z = \frac{20 \times 107{,}8}{124{,}2} = 17{,}36 \text{ €.}$$

d. Pourcentage d'augmentation entre janvier 2004 et juillet 2012 : $\dfrac{124{,}2}{107{,}8} - 1 = 0{,}1521 = 15{,}2\%$.

e. Expression de la fonction f qui permet de déterminer le prix moyen en juillet 2012 d'un produit qui coûtait x € en janvier 2004 : $f(x) = 1{,}152\,x$.

2. a. Cette fonction est linéaire.

b.



c. Graphiquement, on trouve que :

- un objet coûtant 20 € en 2012 valait environ 17,4 € en 2004 ;

- un objet coûtant 15 € en 2004 vaut environ 17,1€ en 2012.

20 Achat d'un scooter

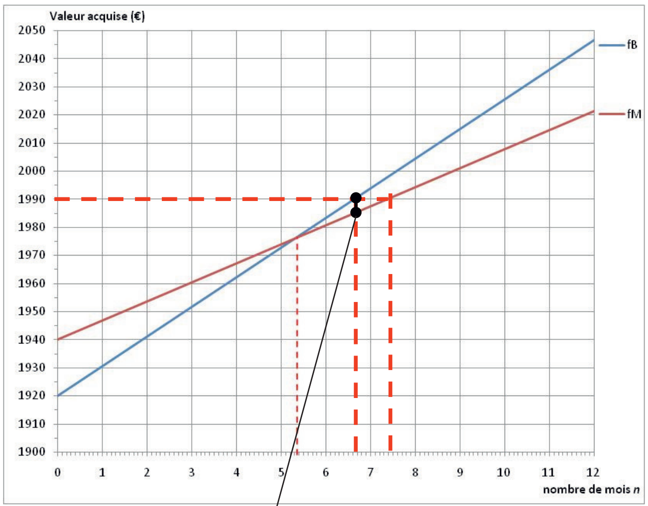
1. a. Après 3 mois de placement :

$A_B = 1\ 951{,}68$ € ; $A_M = 1\ 960{,}37$ €

b. $A_B = 1\ 920 + 10{,}56n$

$A_M = 1\ 940 + 6{,}79n$

2. a.



b. Graphiquement : $f_B(n) = f_M(n)$ pour $n \approx 5{,}3$ mois
Par le calcul : $10{,}56n + 1\ 920 = 6{,}79n + 1\ 940$
$\Rightarrow n \approx 5{,}3$ mois

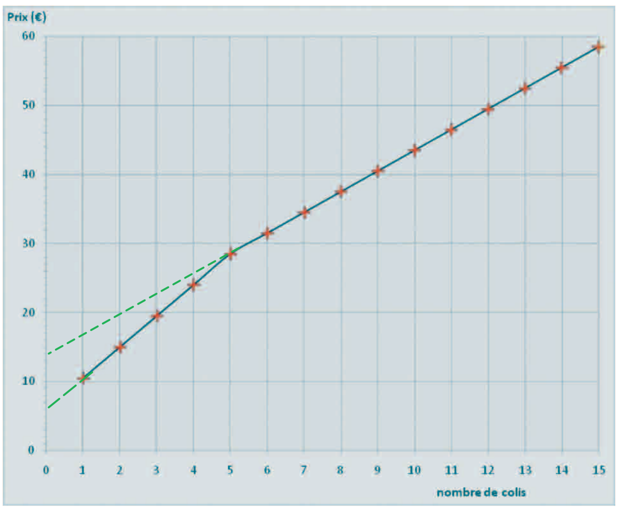
3. a. Boris obtient la somme suffisante pendant le 7^e mois et Maxime pendant le 8^e.

b. Quand Boris peut acheter le scooter, il manque à Maxime environ 5 €.

21 Transport de colis

1. Le prix n'est pas proportionnel au nombre de colis
$\dfrac{10{,}50}{1} \neq \dfrac{43{,}50}{10}$

2. On obtient deux segments de droite, le premier sur l'intervalle [1 ; 5] et le second sur [5 ; 15] ; donc deux fonctions affines.



3. a. a_1 *et* a_2 sont positifs car les segments de droite sont croissants.

$a_1 > a_2$ car la pente du premier segment est supérieure à celle du second.

b. En prolongeant les segments de droite, on peut lire la valeur de b_1 et celle de b_2 sur l'axe des ordonnées : $b_1 \approx 6$ et $b_2 \approx 13{,}5$.

4. $f_1(n) = 4{,}5n + 6$

$f_2(n) = 3n + 13{,}5$

Expressions conformes aux résultats précédents.

5. Tarif dégressif car, pour un nombre de colis inférieur à 5, chaque colis supplémentaire coûte 4,5 € et, au-dessus de 5 colis, il ne coûte que 3 €.

22 Optimiser un investissement

1. Résultat pour une somme investie de 3 k€ :

$R(3) = 102$ k€.

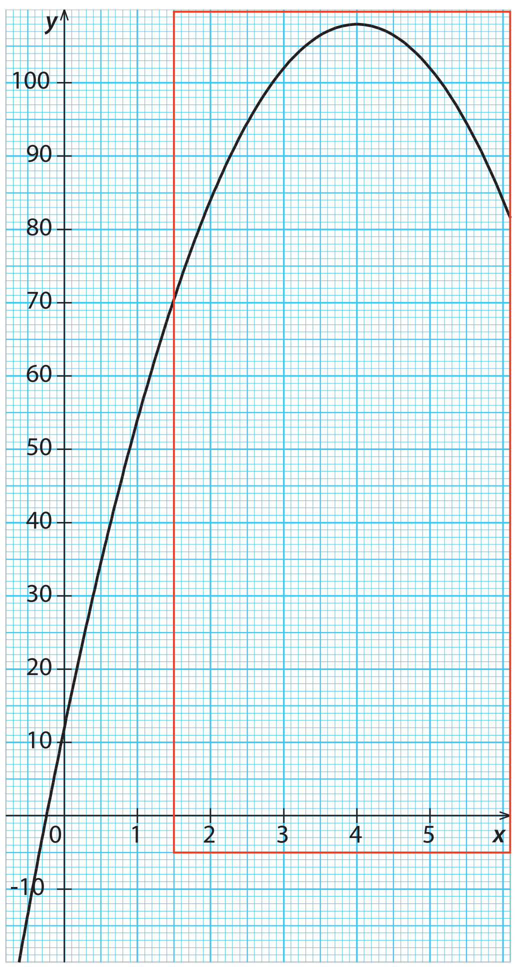
2. Fonction parabolique (du second degré) avec

$a < 0$ donc le sommet est le maximum.

3.

s	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
$R(s)$	70,5	84	94,5	**102**	**106,5**	**108**	**106,5**	102	94,5	84

4.



5. Tableau de variation :

x	1,5		4		6
$f(x)$			108		
	70,5	↗		↘	84

Maximum de la fonction f sur $[1,5 ; 6]$: 108.

6. Le montant de l'investissement qui permet d'obtenir un résultat maximum est 4000 €.

23 Bénéfice et taux de marque

1. a. Le bénéfice n'est pas proportionnel au prix de vente HT car la représentation graphique n'est pas une droite qui passe par l'origine du repère.

b. $f_{50}(x) = 0{,}5\,x - 15$

c. $B = T_m \times PvHT - Fv$ donc, $Fv = 15$ €.

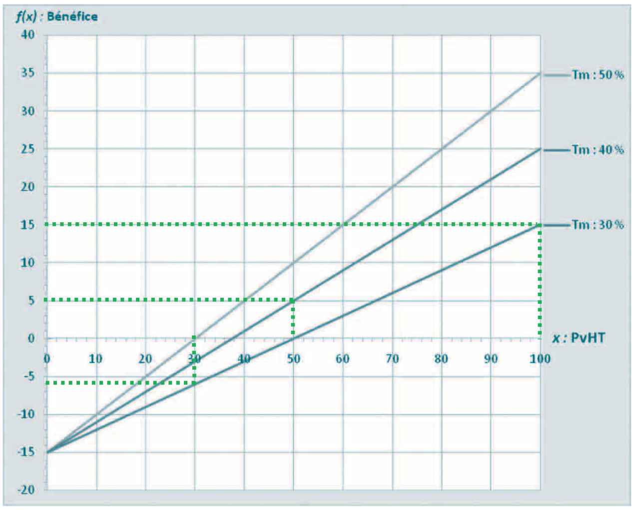
d. PvHT minimum : 30 €.

2. a. $f_{50}(x) = 0{,}5\,x - 15$ donc :

$$f_{30}(x) = 0{,}3\,x - 15 ;$$

$$f_{40}(x) = 0{,}4\,x - 15.$$

b. Avec un tableur, on obtient :



c. - Bénéfice réalisé sur un article vendu 50 € HT avec un taux de marque de 40 % : 5 € ;

- Prix de vente HT pour 15 € de bénéfice avec 30 % de taux de marque : 100 € ;

- Bénéfice réalisé sur un article vendu HT 30 € avec un taux de marque de 30 % : – 6 €.

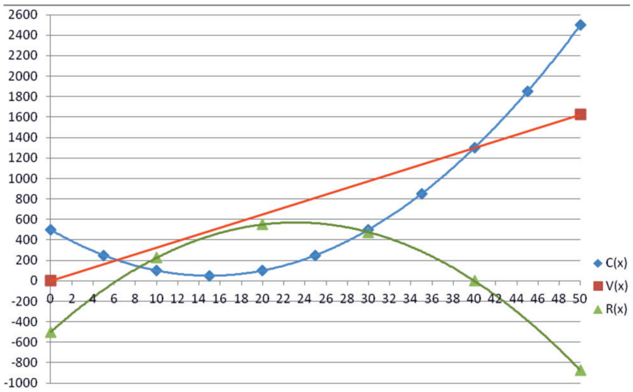
Démarche d'investigation

24 L'entreprise se porte-elle bien ?

1. a.

x	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
$C(x)$	**500**	**250**	**100**	**50**	**100**	**250**	**500**	**850**	**1300**	**1850**	**2500**

b.



2. a. Cf. fonction V dans le repère.

b. La société réalise un bénéfice de 6 à 40 articles et elle est en déficit pour moins de 6 articles et de 40 à 50 articles.

c. Le résultat d'une entreprise correspond au montant des ventes auquel on retranche le montant des charges, soit $R(x) = V(x) - C(x)$.

d. $R(20) = V(20) - C(20) = 32{,}50 \times 20 - 100 = 550$ €

e. $R(x) = V(x) - C(x) = 32{,}50x - (2x^2 - 60x + 500)$
$= -2x^2 + 92{,}5x - 500$

f.

x	0	10	20	30	40	50
$R(x)$	**– 500**	**225**	**550**	**475**	**0**	**– 875**

g. Cf. fonction R dans le repère.

h. $R(x) = 0$ pour $x \approx 6$ et $x \approx 40$.

i. Ces valeurs correspondent à un résultat nul, c'est-à-dire ni bénéfice ni déficit.

j. La société réalise un bénéfice entre 6 et 40 articles.

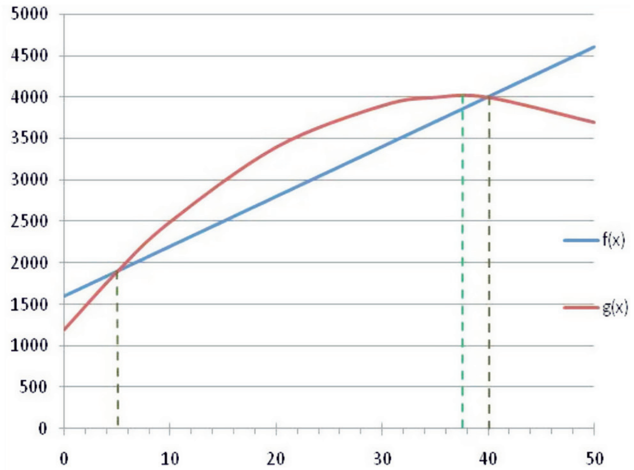
k. On retrouve bien les valeurs obtenues avec l'étude graphique des courbes représentatives de V et C car $R(x) = 0$ correspond à $V(x) = C(x)$.

25 Choix d'une société de livraison

1.

x	0	10	20	30	35	40	50
$f(x)$	1600	2200	2800	3400	3700	4000	4600
$g(x)$	1200	2500	3400	3900	4000	4000	3700

2.



3. a. $g(x)$ maximale pour $x = 37{,}5$.

b. $f(x) = g(x)$ pour $x = 5$ et pour $x = 40$.

c.

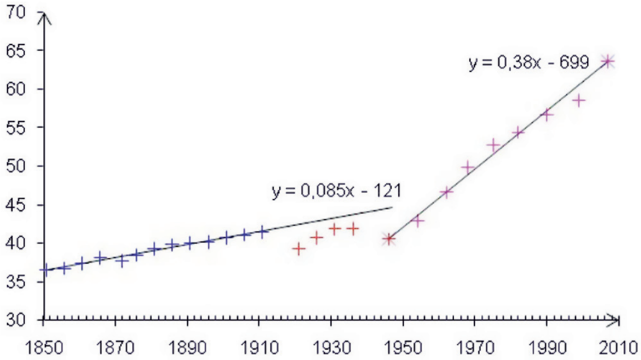
x	0		50
Variation de $f(x)$	1600	$\nearrow$	4600

x	0		37,5		50
Variation de $g(x)$	1200	$\nearrow$	≈ 4000	$\searrow$	3700

d. Si le nombre de livraisons est entre 5 et 40, il est préférable de faire appel à la société de transport. Dans le cas contraire, il est plus rentable pour cette société d'effectuer elle-même le transport.

26 La population française

1. a.



b. Cette population évolue de façon linéaire.

2. a. Cf. repère.

b. En 1921 : 42,285 M d'habitants.

En 1946 : 44,41 M d'habitants.

c. En 1921 : $42{,}285 - 39{,}2 = 3{,}085$ M d'habitants.

En 1946 : $44{,}41 - 40{,}5 = 3{,}91$ M d'habitants.

3. a. Cf. repère.

b. $y = 0{,}38x - 699$

c. Le coefficient directeur est supérieur.

d. Les 30 glorieuses.

e. En 2016, $y = 0{,}38 \times 2016 - 699 = 67{,}1$ M d'habitants.

8 GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE ET LE PLAN

Capacités	Connaissances
• Représenter avec ou sans TIC un solide usuel. • Lire et interpréter une représentation en perspective cavalière d'un solide usuel. • Reconnaître, nommer des solides usuels inscrits dans d'autres solides.	• Solides usuels : le cube, le parallélépipède rectangle, la pyramide, le cylindre droit, le cône de révolution, la sphère.
• Isoler, reconnaître et construire en vraie grandeur une figure plane extraite d'un solide usuel à partir d'une représentation en perspective cavalière.	• Figures planes usuelles : triangle, carré, rectangle, losange, cercle, disque.
• Construire et reproduire une figure plane à l'aide des instruments de construction usuels ou d'un logiciel de géométrie dynamique.	• Figures planes considérées : triangle, carré, rectangle, losange, parallélogramme et cercle. • Droites parallèles, droites perpendiculaires, droites particulières dans le triangle, tangentes à un cercle.

Les objectifs de ce module sont de développer la vision dans l'espace à partir de quelques solides connus, d'extraire des figures planes connues de ces solides et de réactiver des propriétés de géométrie plane. Les capacités à développer s'appuient sur la connaissance des figures et des solides acquise au collège.

ACTIVITÉ 1 : Quelles formes au bureau ?

Tour de CD : Cylindre droit.

Globe terrestre : Sphère.

Unité centrale : Parallélépipède rectangle.

Presse papier : Pyramide.

Stylo bille : Cône de révolution.

ACTIVITÉ 2 : Impossible à construire ?

Dessin 1 : $AB \perp BC$, $BC \perp CD$ et $CD // AE$ $\Rightarrow$ possible dans l'espace.

Dessin 2 : $AB \perp BC$, $BC \perp CA$ et $CA \perp AB \Rightarrow ABC$ triangle avec trois angles droits : impossible.

ACTIVITÉ 3 : Réaliser un patron

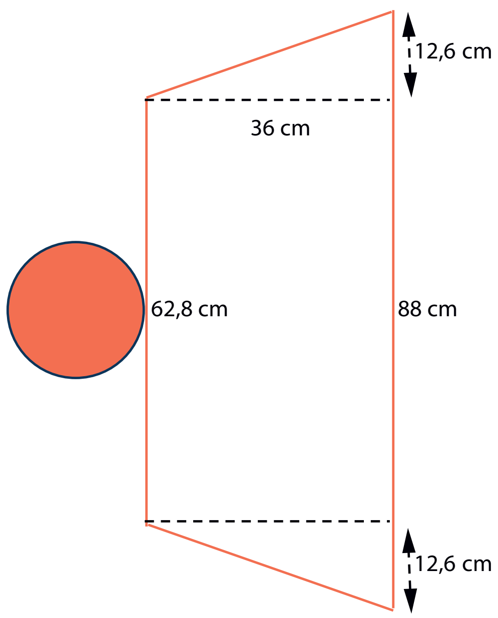
Soient P_f et P_o les périmètres du fond et de l'ouverture de la poubelle.

$P_f = \pi \times 20 = 62{,}8$ cm et $P_o = \pi \times 28 = 88$ cm

(88 – 62,8) / 2 = 12,6 cm

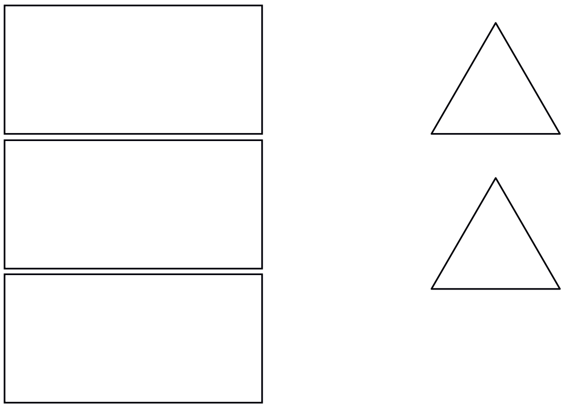
Pour des raisons de place, le patron ci-contre est représenté à l'échelle 1/10.

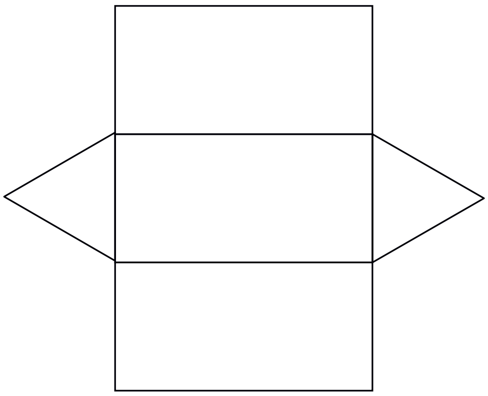
Les cotes sont donc à multiplier par 2 pour respecter la consigne.



Travaux pratiques

Réalisation de patrons avec les outils de dessin d'un traitement de texte

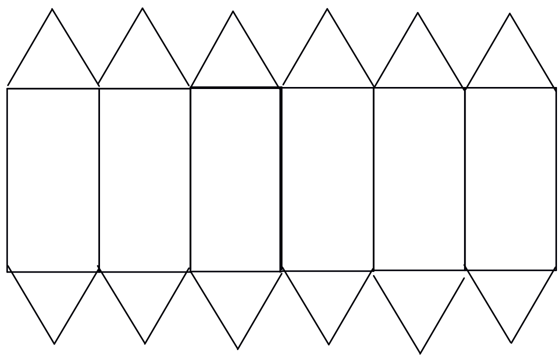




Pour parfaitement placer les triangles, cliquer sur le premier avec le clic droit de la souris puis sur **format de la forme automatique** et fixer l'angle de rotation à 30°. Faire de même sur le second triangle et fixer l'angle de rotation à 330°.

Vue de dessus.

2. Un exemple de patron du cristal de quartz :

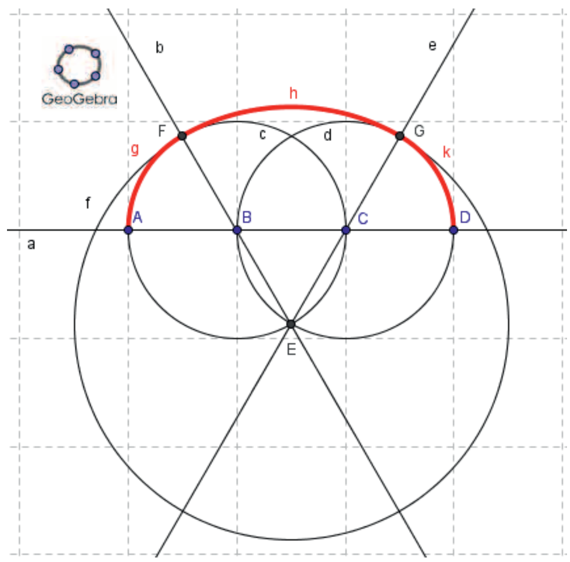


Construction géométrique d'une voûte

1. a. Les cercles « c » et « d » au point E sont sécants.

b. Les cercles « c » et « f » au point F sont tangents.

2. Voir dessin ci-contre.



3. a. $EF = 2\ BE$.

b. Il faut allonger BC pour une piscine plus large.

Exercices

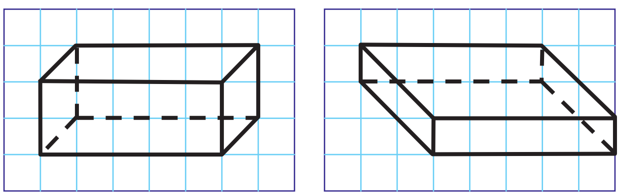
Représentation en perspective cavalière

1 **a.** A : cube ; B parallélépipède rectangle ; C : pyramide droite à base carrée ; D : cylindre droit ; E : cône de révolution ; F : sphère.
b. A : n° 2, toutes les arêtes ont la même longueur ;
B : n° 1, les arêtes de la face supérieure ne sont pas parallèles deux à deux ; n°2 : il n'y a pas d'angle de fuite.
C : n°2, la pyramide n'est pas droite ;
D : aucun ;
E : n° 2, le cercle de base n'est pas en perspective ;
F : n° 2, le cercle n'est pas en perspective.

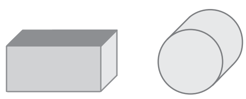
2 **a.** Perspective isométrique : toutes les arêtes ont la même longueur ;
Perspective centrale : les arêtes de la face supérieure ne sont pas parallèles deux à deux.
b. Perspective cavalière : parallélogramme ;
Perspective isométrique : losange ;
Perspective centrale : quadrilatère quelconque.

3 **a.** Angle de fuite de 30° : 2, 5 et 6.
Angle de fuite de 45° : 1, 3 et 4.
b. 1 : cylindre droit ; 2 : cône de révolution ; 3 pyramide droite à base carrée ; 4 : cône ; 5 : cylindre ; 6 : pyramide droite à base carrée.

4

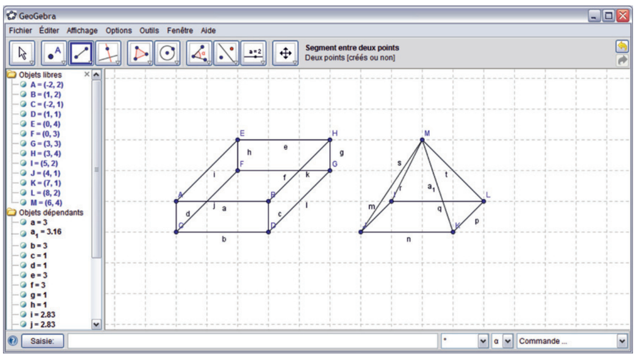


5

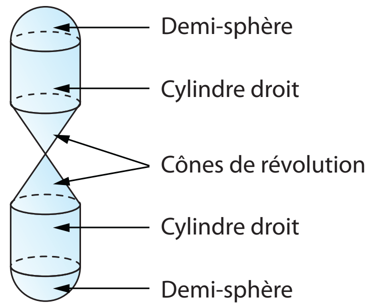


Ces représentations sont des perspectives cavalières : l'**angle de fuite** entre la face avant et une face de côté perpendiculaire est de 45° et deux droites parallèles sont représentées par deux droites parallèles.

6



7

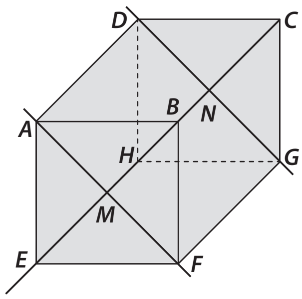


Parallélisme et orthogonalité

8

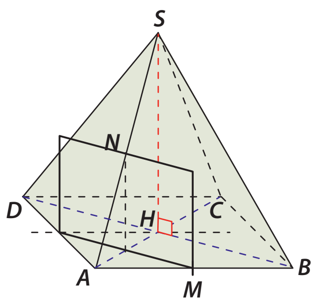
Solide	$\mathscr{P}_1$	$\mathscr{P}_2$
Cube	Carré	Carré
Parallélépipède rectangle	Rectangle	Carré
Pyramide droite à base carrée	Triangle	Carré
Cylindre droit	Rectangle	Cercle
Cône de révolution	Triangle	Cercle
Sphère	Cercle	Cercle

9 **a.** et **b.**



c. l'intersection des plans (*ADGF*) et (*BCHE*) est le segment [*MN*].
d. 90°, les diagonales du carré *ABFE* se coupent en angles droits.

10 **a.** et **b.**



L'intersection de la droite (*AS*) et du plan parallèle au plan (*DSB*) passant par *M* est le point *N*.

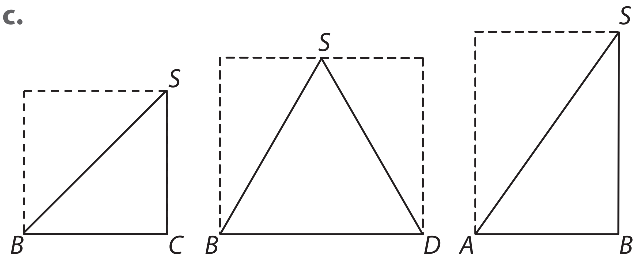
Figures planes extraites de solides usuels

11
ABE : triangle rectangle ;
ABD : triangle rectangle ;
EBH : triangle rectangle ;
DBE : triangle quelconque ;
ABFE : rectangle ;
ADHE : rectangle ;
CDEF : rectangle ;
BEHC : rectangle.

12 **a.** Quatre réponses possibles par pyramide.
BCDS :
- pyramide oblique de sommet *S* à base *BCD* triangulaire et isocèle ;
- pyramide oblique de sommet *B* à base *CDS* triangulaire et isocèle ;
- pyramide droite de sommet *C* à base *BDS* triangulaire et équilatérale ;
- pyramide oblique de sommet *D* à base *BCS* triangulaire et isocèle.

ABDS :
- pyramide oblique de sommet *S* à base *ABD* triangulaire et isocèle ;
- pyramide oblique de sommet *A* à base *BDS* triangulaire et équilatérale ;
- pyramide oblique de sommet *B* à base *ADS* triangulaire ;
- pyramide oblique de sommet *D* à base *ABS* triangulaire.

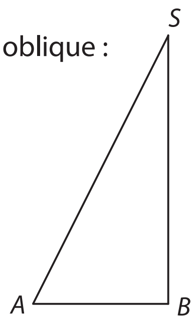
b. *BCS* : triangle isocèle ;
BDS : triangle équilatéral ;
ABS : triangle quelconque.
c.



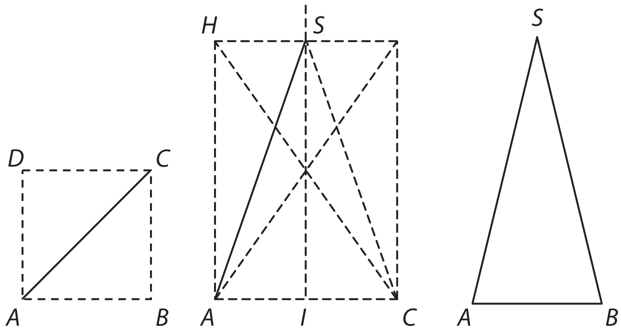
13 **a.** Pyramide oblique :
ABCD : carré ;
AIB : triangle isocèle ;
ABS : triangle rectangle.

Pyramide droite :
ABCD : carré ;
AIB : triangle isocèle ;
ABS : triangle isocèle.

b. Pyramide oblique :



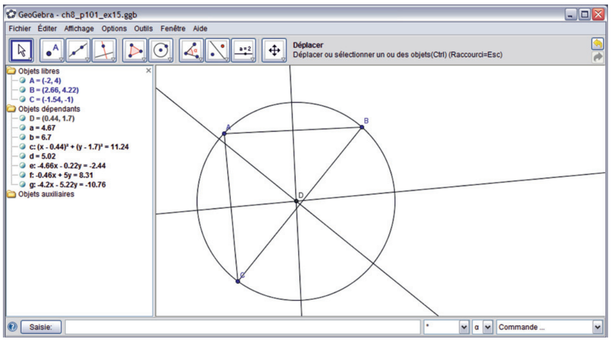
Pyramide droite :



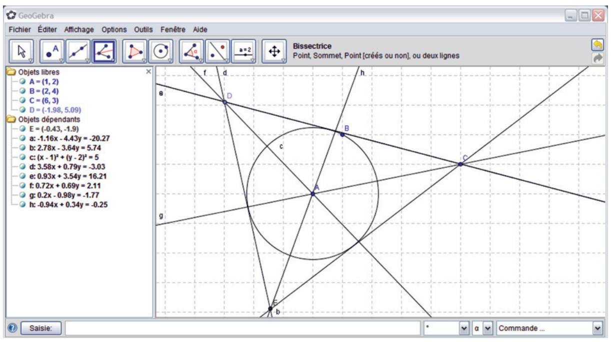
14 **a.** *IJH* et *ESJF* ne sont pas des figures planes.
b. *EIFJ* est un losange.
c. *ABCDLKIJ* est un parallélépipède rectangle.
EIFJS est une pyramide dont la base est un losange.

Droites particulières dans un triangle

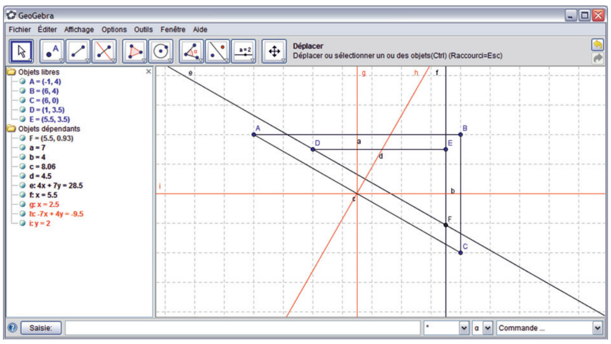
15



16



17

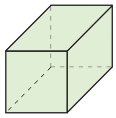


Le centre de gravité peut être matériel ou immatériel suivant l'équerre tracée.

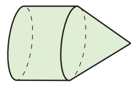
QCM : Testez-vous !

1. A. proportionnelles aux dimensions

2. A.



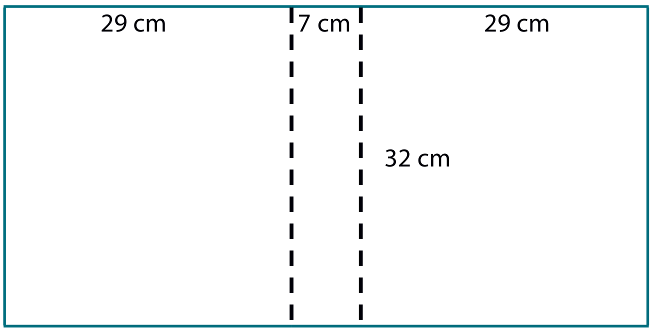
3. A.



4. C. un rectangle
5. C. rectangle
6. B. médiatrices
7. C. aux côtés du triangle

Problèmes

18 Le classeur de rangement

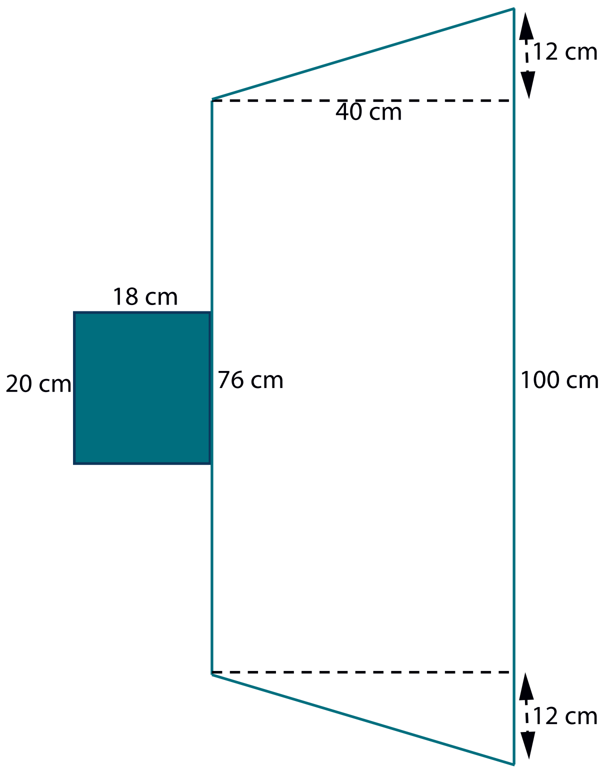


19 Corbeille de bureau

Soient P_f et P_o les périmètres du fond et de l'ouverture de la poubelle.

$P_f = (18 + 20) \times 2 = 76$ cm et $P_o = (20 + 30) \times 2 = 100$ cm

$$\frac{100 - 76}{2} = 12 \text{ cm}$$



20 Analyse de plan

1. 1 : porte coulissante, 2 : canapé, 3 : télévision, 4 : évier, 5 : table de salon.

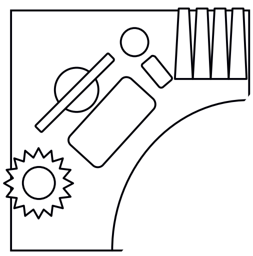
2. Pièce 6 : chambre.

3. Lit ; bureau avec écran, fauteuil, livres, souris et clavier ; commode avec dessus des classeurs.

4. Pièce 7 : salle de bain.

5. Douche ; lavabo ; wc.

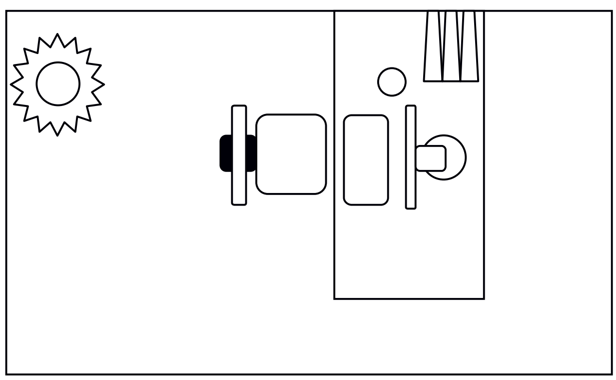
21 Vue de dessus



22 La bonne position

1. Les objets vus de faces : poubelle ; classeurs ; fenêtre, porte stylos.
Les objets vus de côté : écran, fauteuil, table, clavier

2.



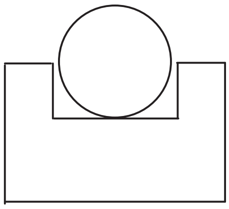
23 Illusion d'optique

On identifie des cercles concentriques coplanaires coupés dans ce même plan par des arcs de courbes, des triangles et des losanges.

24 Futuroscope

1. Solide usuel : sphère.
Figures planes usuelles : disque (tronqué), triangles rectangles, rectangles, trapèze rectangle.

2. Vue de face :



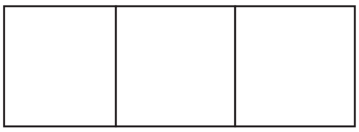
25 Fusée Ariane

1. On reconnaît un cône droit, deux cônes obliques, des troncs de cônes et plusieurs cylindres.

2. Vue de côté : voir schéma ci-contre.

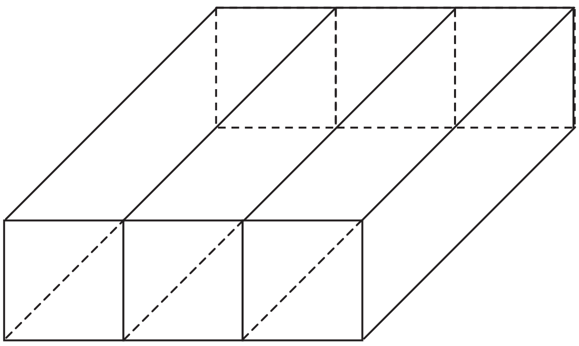
26 Maison en conteneurs

1. a. Vue de la face avant :



b. Vue de droite : rectangle.

c. Perspective cavalière : parallélépipède rectangle.



2. Il faut empiler 5 conteneurs sur 5 rangées accolées soit : $5 \times 5 = 25$ conteneurs.

27 Meules dentaires

1. a. Cylindre, tronc de cône, cylindre et demi-sphère.

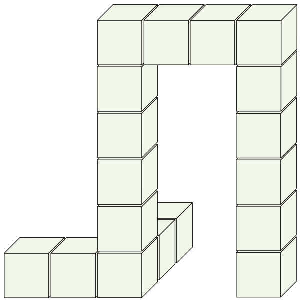
b. 1 : cylindre ; 2 : cylindre ; 3 : cône ; 4 : sphère ; 5 : tronc de cône ; 6 : cylindre ; 7 : tronc de cône ; 8 : cône ; 9 : cylindre.

2. 1 : rectangle ; 2 : rectangle ; 3 : triangle ; 4 : disque ; 5 : trapèze ; 6 : rectangle ; 7 : trapèze ; 8 : triangle ; 9 : rectangle.

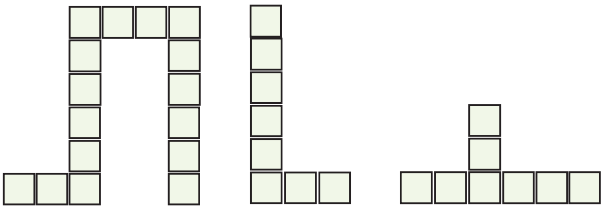
3. Cavité de forme cylindrique avec un fond hémisphérique.

28 Portique de terrasse

1. a. Perspective cavalière



b. Vue de face Vue de droite Vue de dessus



2. a. Cet élément de terrasse est constitué de 18 cubes.

b. Cet élément de terrasse est composé de 5 parallélépipèdes rectangles.

29 La Grande Arche

1. a. Non. Le plan (*IJK*) est parallèle au plan (*ABC*).

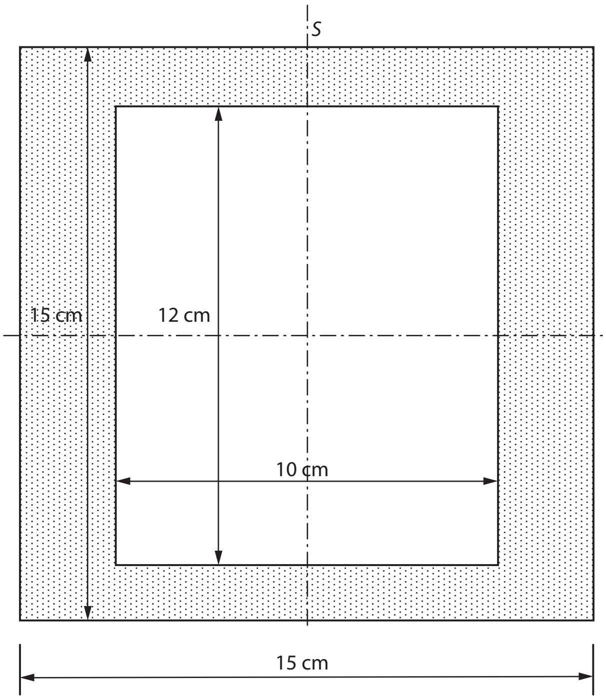
b. Oui. Les points *I*, *L*, *X* et *Y* appartiennent au même plan oblique.

c. Le segment [*MP*] correspond à l'intersection des plans (*EMP*) et (*MNP*).

2. a. Le cercle sur le toit n'est tangent qu'à deux côtés opposés du quadrilatère *WXYZ* qui en conséquence n'est pas un carré.

b. La base du parallélépipède *IJKLMNOP* est un rectangle.

3. a. Exemple : $AD = AE = 15$ cm, $MP = \frac{2}{3}AD = 10$ cm, $IM = \frac{4}{5}AE = 12$ cm.



b. Figures planes dans le dessin : un rectangle et un carré.

30 Support de tablette numérique

1. *ABC* : triangle équilatéral.

ABS : triangle quelconque.

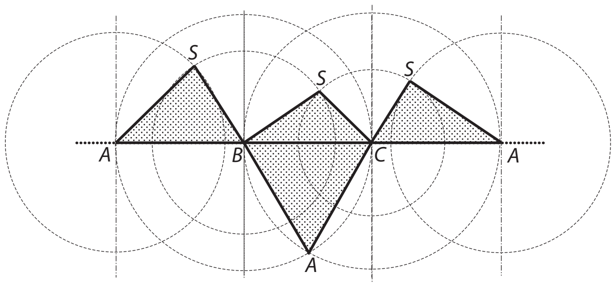
ACS : triangle quelconque.

BCS : triangle quelconque.

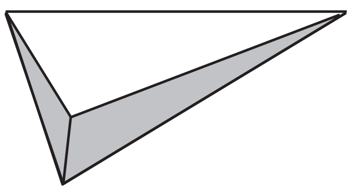
2. Dessin du patron du support pyramidal.

Exemple : $AB = AC = BC = \dfrac{7}{2} = 3{,}5$ cm ; $AS = \dfrac{7-1}{2} = 3$;

$BS = \dfrac{7-2}{2} = 2{,}5$; $CS = \dfrac{7-3}{2} = 2$.

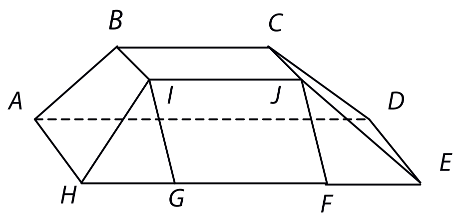


3. Découpe du patron et construction de la pyramide.



4. La pyramide est oblique plutôt que droite pour obtenir trois angles d'inclinaison différents.

31 La piste de skate-board

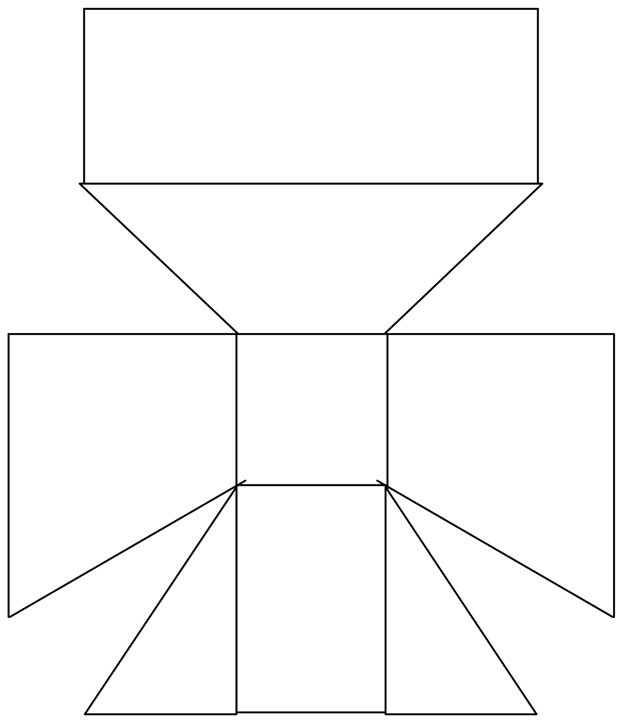


IGH est un triangle rectangle :
On sait que *H*, *G*, *F* et *E* sont colinéaires, *IGJF* est un rectangle.
[*IG*] est donc perpendiculaire à [*GH*].

JFE est un triangle rectangle :
On sait que *H*, *G*, *F* et *E* sont colinéaires, *IGJF* est un rectangle.
[*JF*] est donc perpendiculaire à [*FE*].

ABIH est un trapèze rectangle :
On sait que *AB* = 3 m et que *BI* = 2 m et que [*AB*] est perpendiculaire à [*BI*].
IGH est un triangle rectangle :
IG = 3 m et *GH* = 2 m, alors *HI* > 3 m donc *HI* > *AB*.

Même raisonnement pour *CJED*.



Pour des raisons de place, le patron ci-dessus est représenté à l'échelle 1/100.

Les cotes sont donc à multiplier par 2 pour respecter la consigne.

32 Notre planète

1. Non, la mappemonde ne peut pas être considérée comme un « patron » de la sphère.
Le rectangle est le patron du cylindre.

2. Les distances réelles ne sont proportionnelles aux distances sur la mappemonde que sur l'équateur.

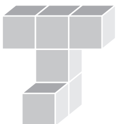
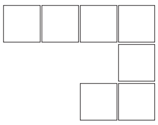
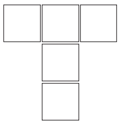
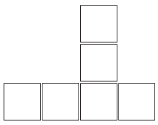
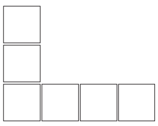
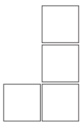
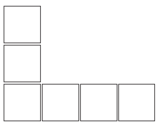
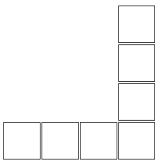
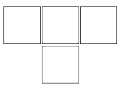
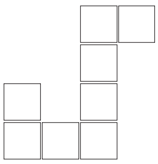
3. Si on coupe la sphère par un de ses méridiens, on obtient un cercle.

4. Si on coupe la sphère par un de ses parallèles, on obtient un cercle.

5. Si on coupe la sphère par chacun de ses méridiens, les cercles obtenus ont même rayon, Dans le cas, d'une coupe par ses parallèles les cercles n'ont pas le même rayon.

33 Jeux de cubes

1. 2. 3. 4. et **5. a. b.**

			
Vue de face			
Vue de droite			
Vue de dessus			
Nombre de cubes	10 cubes	6 cubes	10 cubes

Démarche d'investigation

34 Centre du plateau en verre

1. Solides usuels : quatre cylindres et deux troncs de cônes.

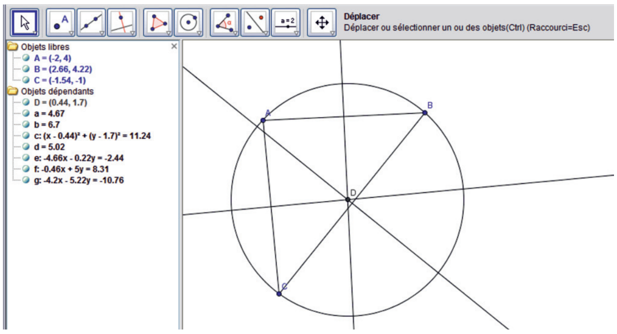
2. Méthode pour déterminer géométriquement le centre du plateau circulaire.

- choisir 3 points A, B, et C appartenant à la circonférence du disque de verre ;

- tracer les segments $[AB]$, $[BC]$, et $[AC]$;

- construire les médiatrices de ces trois segments qui sont concourantes au point O, centre du cercle circonscrit au triangle ABC c'est-à-dire du disque de verre.

3.



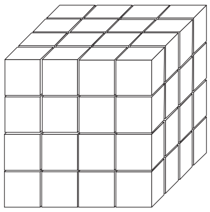
35 Emballage économique

Trois solutions possibles :

Solution 1

Nombre de faces unités visibles :

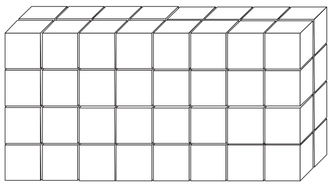
$16 \times 6 = 64$



Solution 2

Nombre de faces unités visibles :

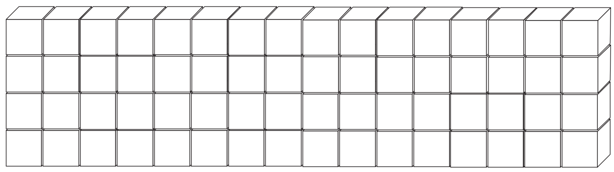
$32 \times 2 + 8 \times 2 = 80$



Solution 3

Nombre de faces unités visibles :

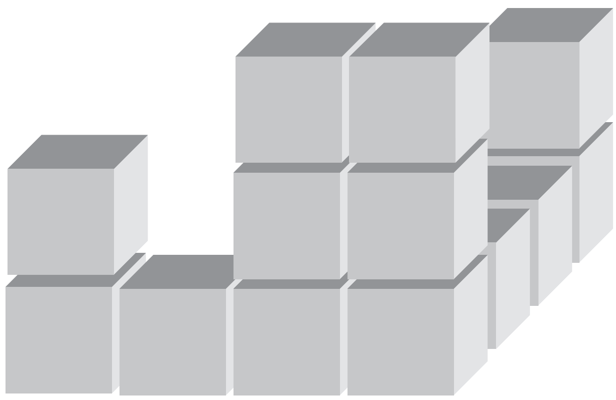
$64 \times 2 + 4 \times 2 = 136$



La première solution nécessite le moins de carton pour l'emballage.

36 Passage du plan à l'espace

Vue en perspective cavalière avec les outils de dessin d'un logiciel de traitement de texte :



9 CALCULS GÉOMÉTRIQUES DANS LE PLAN

Capacités	Connaissances
• Utiliser les théorèmes et les formules pour : – calculer la longueur d'un segment, d'un cercle ; – calculer en degré la mesure d'un angle ; – calculer l'aire d'une surface	• Somme des mesures, en degré, des angles d'un triangle. • Formule donnant la longueur d'un cercle à partir de celle de son rayon. • Le théorème de Pythagore. Le théorème de Thalès dans le triangle. • Formule de l'aire d'un triangle, d'un carré, d'un rectangle, d'un disque.

Les objectifs de ce chapitre sont la réappropriation par les élèves des principaux théorèmes de la géométrie plane et l'utilisation des expressions des aires des figures planes.

D'une manière plus particulière :

– le premier TP permet à l'élève de réaliser une démonstration de la propriété de Pythagore en suivant les pas des géomètres chinois, touchant ainsi « du doigt » l'universalité des mathématiques ;

– le second TP exploite la « puissance de calcul » d'un tableur pour mettre en évidence l'intérêt et les limites effectives de l'assimilation de la tangente d'un angle au sinus de ce même angle ;

– dans le problème n°31, l'utilisation du logiciel GeoGebra permet aux élèves de *voir* comment la pente d'un plan incliné évolue selon l'angle d'inclinaison ;

– la démarche d'investigation à mettre en œuvre au problème n°33, pour juger de la pertinence d'un achat, implique l'utilisation conjointe par les élèves des propriétés de Thalès et de Pythagore ;

– enfin, le problème n°35 amène les élèves à formaliser une démonstration connue depuis l'Antiquité grecque.

Activité 1 : Aménagement d'un bureau

1. Aire bureau : $5 \times 4 = 20$ m^2.

2. Aire zone client : $\dfrac{3 \times 4}{2} = 6$ m^2.

3. CE $= \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ m

4. $\dfrac{GH}{AB} = \dfrac{GF}{FA}$ donc $\dfrac{GH}{3} = \dfrac{2}{4}$ donc $GH = 1{,}5$ m.

5. Aire ABF : 6 m^2 et aire $GHF = 1{,}5 \times 2/2 = 1{,}5$ m^2. Aire zone détente : $6 - 1{,}5 = 4{,}5$ m^2.

6. Aire zone vendeur : $20 - 6 - 4{,}5 = 9{,}5$ m^2. C'est bien supérieur à 8 m^2.

Activité 2 : L'aire de la surface vitrée de la Pyramide

1. Les quatre triangles sont isocèles puisque les arêtes [*FU*], [*FV*], [*FJ*] et [*FQ*] mesurent la même longueur.

2. La propriété de Pythagore appliquée au triangle *RES* permet d'écrire :

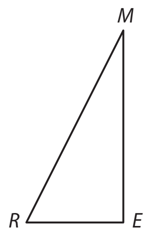
$FR^2 = FS^2 + SR^2$ avec $SR = \dfrac{34{,}40}{2}$ soit 17,20 m ; $ER = \sqrt{21{,}60^2 + 17{,}20^2}$ d'où $ER \approx 27{,}61$ m.

$A_1 = \dfrac{VI \times RF}{2}$ soit $A_1 = \dfrac{34{,}40 \times 27{,}61}{2}$ d'où $A_1 \approx 479{,}89$ m^2

3. L'aire totale de la surface vitrée est donc : 1 899,56 m^2.

$\tan \alpha = \dfrac{FS}{RS}$ d'où $\alpha = \tan^{-1}\left(\dfrac{21{,}60}{17{,}20}\right)$ soit $\alpha \approx 51°$.

Activité 3 : Consignes de sécurité



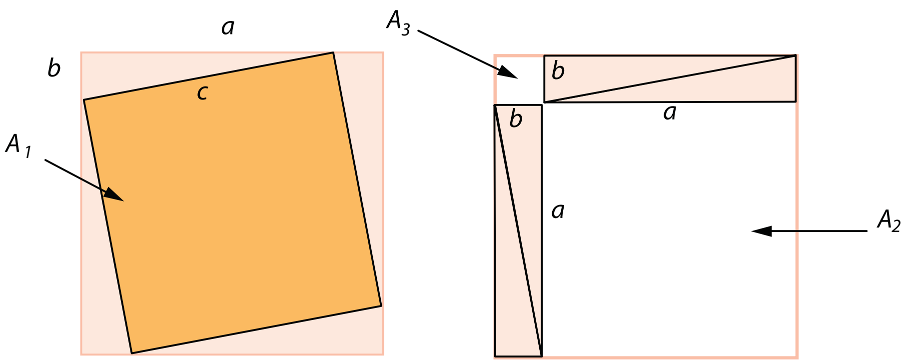
On modélise l'échelle par [*RM*] ; *E* est à la verticale du point *M*.
On applique alors une relation trigonométrique dans le triangle rectangle *MRE* :

$\sin \hat{R} = \dfrac{ME}{RM}$ d'où $\hat{R} = \sin^{-1}\left(\dfrac{2,70}{3,05}\right)$; $\hat{R} \approx 62°$.

Puisque $62° < 65°$, Greg ne pourra pas travailler en toute sécurité sur l'échelle telle qu'il l'a installée.

Travaux pratiques

Démonstration chinoise



a. Aire du carré orange : $A_1 = c^2$.

c. Aire des carrés blancs : $A_2 = a^2$ et $A_3 = b^2$.

d. $A_1 = c^2$; A_1 a pour aire l'aire du grand carré moins celle des 4 triangles rectangles.
C'est donc la somme des aires A_2 et A_3. Ainsi : $A_1 = A_2 + A_3$.

e. On trouve alors : $c^2 = a^2 + b^2$.

f. On identifie l'expression formulée par Pythagore.

Remarque : il est intéressant de laisser les élèves choisir des dimensions de carrés différentes et aboutir à la même conclusion.

Comment calcule-t-on une pente ?

1. a. $h = 1256 - 1230$ soit 26 m ; la propriété de Pythagore permet d'écrire $d^2 = l^2 - h^2$ soit :
$d = \sqrt{234^2 - 26^2}$, d'où $d \approx 232,55$ m.
On peut donc exprimer la pente : $p = \dfrac{26}{232,55}$, soit $p \approx 0,11$ c'est-à-dire environ 11 %.

b. Le rapport $\dfrac{h}{d}$ correspond à la tangente de l'inclinaison $\hat{C}$.

c. $\hat{C} = \tan^{-1}(0,11)$ d'où $\hat{C} \approx 6°$.

2. a. Le calcul DREAL donne : $q = \dfrac{26}{234}$ d'où $q \approx 0,11$!

b. Le rapport $\dfrac{h}{l}$ correspond au sinus de l'inclinaison $\hat{C}$ et $\sin^{-1}(0,11)$ correspond à un angle d'environ 6° (soit le même qu'avec la tangente).

3. a. $\frac{h}{l} = \frac{62}{15}$; d'où $\frac{h}{l} \approx 0{,}24$ c'est-à-dire environ 24 %. Ceci ne semble pas correspondre aux 25 % du panneau.

Dans ce cas, l'angle d'inclinaison correspond à $\sin^{-1}(0{,}24)$, soit 14° d'inclinaison.

b. $p = \frac{h}{d}$ avec $d = \sqrt{62^2 - 15^2}$ soit $d \approx 60{,}16$ m.

$p = \frac{15}{60{,}16}$ d'où $p \approx 0{,}25$. Ceci correspond à une pente de 25 % c'est à dire celle indiquée par le panneau. Dans ce cas, l'inclinaison est $\hat{C} = \tan^{-1}(0{,}25)$, soit environ 14°.

c. On obtient donc la même inclinaison pour un calcul de pente présentant une différence de moins de 1 % (arrondie).

4. et **5.**

angle (°)	sinus	tangente	pente selon les mathématiques (%)	écart
0	0	0	0	0
1	0,01745241	0,01745506	1,745506493	2,6585E-06
2	0,0348995	0,03492077	3,492076949	2,1273E-05
3	0,05233596	0,05240778	5,240777928	7,1823E-05
4	0,06975647	0,06992681	6,992681194	0,00017034
5	0,08715574	0,08748866	8,748866353	0,00033292
6	0,10452846	0,10510424	10,51042353	0,00057577
7	0,12186934	0,12278456	12,27845609	0,00091522
8	0,1391731	0,14054083	14,05408347	0,00136773
9	0,15643447	0,15838444	15,83844403	0,00194998
10	0,17364818	0,17632698	17,63269807	0,0026788
11	0,190809	0,19438031	19,43803091	0,00357131
12	0,20791169	0,21255656	21,25565617	0,00464487
13	0,22495105	0,23086819	23,08681911	0,00591714
14	0,2419219	0,249328	24,93280028	0,00740611
15	0,25881905	0,26794919	26,79491924	0,00913015
16	0,27563736	0,28674539	28,67453858	0,01110803
17	0,2923717	0,30573068	30,57306815	0,01335898
18	0,30901699	0,3249197	32,49196962	0,0159027
19	0,32556815	0,34432761	34,43276133	0,01875946
20	0,34202014	0,36397023	36,39702343	0,02195009
21	0,35836795	0,38386404	38,3864035	0,02549609
22	0,37460659	0,40402623	40,40262258	0,02941963
23	0,39073113	0,42447482	42,44748162	0,03374369
24	0,40673664	0,44522869	44,52286853	0,03849204
25	0,42261826	0,46630766	46,63076582	0,0436894
26	0,43837115	0,48773259	48,77325886	0,04936144
27	0,4539905	0,50952545	50,95254495	0,05553495
28	0,46947156	0,53170943	53,17094317	0,06223787
29	0,48480962	0,55430905	55,43090515	0,06949943
30	0,5	0,57735027	57,73502692	0,07735027

L'approximation de la DREAL reste pertinente pour une inclinaison comprise entre 0° et 15°.

Exercices

Somme des angles d'un triangle

1 La juxtaposition des 3 angles forme un angle plat. La propriété est « la somme des 3 angles d'un triangle est égale à 180° ».

2 Non. Un angle obtus a une valeur supérieure à un angle droit (90°) ; donc deux angles obtus ont une somme supérieure à 180°.

Propriété de Thalès dans les triangles

3 Pour déterminer *BE*, il faut déterminer *CB*. La propriété de Thalès dans les triangles permet d'écrire :

$\frac{CB}{CE} = \frac{CA}{CD} = \frac{BA}{ED}$ d'où $\frac{CB}{4} = \frac{(7+5)}{5}$ d'où $CB \approx 9{,}6$.

On peut écrire que $BE = CB - EC$; $BE = 9{,}6 - 4$ d'où $BE = 5{,}6$.

4 La propriété de Thalès dans les triangles permet d'écrire :

$\frac{TG}{RA} = \frac{IG}{IA} = \frac{IT}{IR}$ d'où $\frac{TG}{4} = \frac{(6+3)}{6}$ d'où $TG = 6{,}0$.

5 La propriété de Thales dans les triangles permet d'écrire :

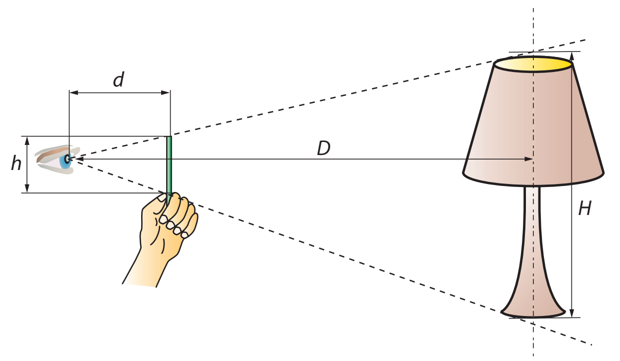
$\frac{CR}{CI} = \frac{CO}{CK} = \frac{RO}{IK}$ d'où $\frac{CR}{12} = \frac{15}{5}$ et d'où $CR = 36$.

6 La propriété de Thalès dans les triangles permet d'écrire : $\frac{h+3{,}1}{3{,}1} = \frac{10}{2{,}2}$ donc $h + 3{,}1 = \frac{31}{2{,}2}$ soit $h \approx 14{,}1$.

7 Afin de respecter les proportions, le crayon servant à la visée doit rester parallèle à l'axe vertical du pied de la lampe.

Pour que l'objet soit bien reproduit, il faut que chaque rapport $\frac{h}{H}$ reste le même et égal à $\frac{d}{D}$ (*d* et *D* doivent rester constants, c'est-à-dire que la distance de l'artiste par rapport à l'objet doit rester constante avec le bras tendu de la même manière).

C'est une application de la propriété de Thalès dans les triangles.



Réciproque de la propriété de Thalès

8 On fait appel à la réciproque de la propriété de Thalès dans les triangles.

D'une part : $\frac{PA}{PR} = \frac{3{,}3}{(3{,}3+0{,}9)}$ d'où $\frac{PA}{PR} \approx 0{,}786$;

D'autre part : $\frac{PE}{PL} = \frac{2{,}2}{(2{,}2+0{,}6)}$ d'où $\frac{PE}{PL} \approx 0{,}786$

Comme $\frac{PA}{PR} = \frac{PE}{PL}$, la réciproque de la propriété de Thalès dans les triangles permet de conclure que (*AE*) // (*RL*).

9 La réponse fait appel à la réciproque de la propriété de Thalès.

D'une part, $\frac{AR}{AN} = \frac{23}{(23+33)}$ d'où $\frac{AR}{AN} \approx 0{,}411$.

D'autre part, $\frac{AY}{AU} = \frac{22}{32+22}$ d'où $\frac{AY}{AU} \approx 0{,}407$.

Comme $\frac{AR}{AN} \neq \frac{AY}{AU}$, on peut conclure que (*RY*) n'est pas parallèle à (*NU*).

10 **a.** *OAC* est un triangle isocèle puisque $OA = OC$.

b. (*OI*) est la médiatrice de [*AC*] puisque le triangle est isocèle et que *I* est le milieu de [*AC*].

$\frac{AI}{AC} = \frac{1}{2}$ (*I* milieu [*AC*]) et $\frac{AO}{AB} = \frac{1}{2}$ (*O* centre du cercle et donc milieu de diamètre [*AB*]).

On a donc : $\frac{AI}{AC} = \frac{AO}{AB}$; la réciproque de la propriété de Thalès permet de conclure que (*OI*) // (*BC*).

c. (*OI*) ⊥ (*AC*) et (*OI*) // (*BC*) donc (*BC*) ⊥ (*AC*).

Le triangle *ABC* est rectangle en *C*.

Propriété de Pythagore dans le triangle rectangle

11 La propriété de Pythagore permet d'écrire : $TI = \sqrt{IP^2 - TP^2}$; d'où : $TI \approx 16{,}62$ m.

De manière identique : $TP = \sqrt{IP^2 - TI^2}$ d'où $TP \approx 0{,}46$ km.

$IP = \sqrt{TP^2 + IP^2}$; $IP \approx 9{,}87$ dam.

12 **a.** $L = 2{,}10 + \frac{2{,}10}{3} + 2{,}10$ ou $L = 2{,}10 + 2 \times \frac{2}{3} \times 2{,}10$ d'où $L = 4{,}90$ m.

b. La propriété de Pythagore permet d'écrire : $h^2 = L^2 - 1^2$; $h = \sqrt{4{,}90^2 - 1^2}$ d'où $h \approx 4{,}80$ m.

13 h est la hauteur à laquelle se trouve le sommet de l'échelle. La propriété de Pythagore permet d'écrire : $h^2 = 2{,}90^2 - 1{,}225^2$; d'où $h \approx 2{,}629$.

Le sommet de l'échelle double est à environ 2,629 m.

Réciproque de la propriété de Pythagore

14 Le triangle 1 n'est pas rectangle ; le triangle 2 est rectangle en C ; le triangle 3 est rectangle en A ; le triangle 4 n'est pas rectangle.

15 La méthode correspond à la propriété réciproque de Pythagore :

– d'une part : $PL^2 = 100^2 = 10\,000$;

– d'autre part : $OP^2 + OL^2 = 80^2 + 60^2 = 10\,000$.

Comme $PL^2 = OP^2 + OL^2$, le triangle POL est rectangle en O.

Cette méthode permet bien de tracer 2 droites perpendiculaires.

Relations trigonométriques dans le triangle rectangle

16 **a.** $\cos \widehat{EFR} = \dfrac{FE}{FR}$; $FR = \dfrac{5}{\cos 25°}$ d'où $FR \approx 5{,}52$.

b. $\sin \widehat{ERD} = \dfrac{DE}{ER}$; $DE = 16 \times \sin 50°$ d'où $DE \approx 12{,}26$.

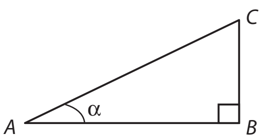
c. $\sin \widehat{IBC} = \dfrac{IC}{BC}$; $BC = \dfrac{77}{\sin 22°}$ d'où $BC \approx 205{,}55$.

17 $\tan \alpha = \dfrac{RE}{JE}$; $\alpha = \tan^{-1}\left(\dfrac{97}{150}\right)$ d'où $\alpha \approx 33°$.

18 $\tan i = \dfrac{x}{2x}$ d'où $i = \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)$; $i \approx 26{,}6°$.

19 $\tan \alpha = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{BC}{D}$ d'où $BC = 245 \times \tan 35°$; $BC \approx 171{,}55$ m.

$H = h + BC$ d'où $H \approx 173{,}20$ m.



Aires de figures planes

20 Aire d'un rouleau :

– de revêtement intissé : $A_1 = 25 \times 1{,}06$ d'où $A_1 = 26{,}5$ m^2 ;

– papier peint : $A_2 = 10{,}05 \times 0{,}53$; $A_2 = 5{,}3265$ m^2 soit pour 5 rouleaux : 26,6325 m^2.

L'affirmation est donc vraie à 0,5 % près.

21 **a.** $P = 2\pi R$ d'où $P \approx 58$ cm.

b. $A = 12^2 - \pi R^2$ soit $A \approx 31$ cm^2.

22 $A = \left(\dfrac{1400 + 700}{2}\right) \times 740$; l'aire du plateau de la table trapézoïdale mesure 777 000 mm^2 soit 0,7770 m^2.

23 **a.** On fait appel à la propriété réciproque de Pythagore ;

– d'une part : $BC^2 = 128^2 = 16\,364$;

– d'autre part : $AB^2 + AC^2 = 76{,}80^2 + 102{,}40^2 = 16\,364$

b. Le triangle constitue un demi-rectangle longueur BA et de largeur AC ; d'où $\mathcal{A} = \dfrac{76{,}80 \times 102{,}40}{2}$.

L'aire du terrain mesure donc 3 932,16 m^2

QCM : Testez-vous !

1. C. $XW = 3{,}75$

2. A. la propriété de Thalès dans les triangles

3. B. fausse

4. B. $\cos \widehat{N}$

5. C. $MN \approx 21{,}1$

6. A. $\sin \widehat{O}$

7. A. $\widehat{O} \approx 31°$

8. B. $NM^2 = ON^2 - OM^2$

9. B. la propriété de Pythagore

10. B. πR^2

Problèmes

24 De la Terre au Soleil

$\frac{TS}{TL} = \frac{\text{Diamètre soleil}}{\text{Diamètre lune}}$ (on peut également passer par les rayons).

La distance Terre-Soleil $TS = \frac{695\,000}{1\,750} \times 384\,000$ d'où $TS = 152\,502\,857$ km.

25 Bricolage

1. Aire d'un paquet de lames de parquet : $A_{\text{lame}} = 1{,}090 \times 0{,}206 \times 8$ d'où $A_{\text{lame}} = 1{,}79\,632$ soit $1{,}8$ m^2 à 0,1 près.

2. a. Aire du séjour : $A_{sj} = 5{,}4 \times (2{,}8 + 2{,}2) + 3{,}2 \times 2{,}2$ d'où $A_{sj} = 34{,}04$ m^2.
b. Aire de parquet à prévoir : $A'_{sj} = 34{,}04 \times 1{,}1$ soit $A_s \approx 37{,}44$ m^2. Il faut prévoir 21 paquets de lames de parquet.

26 Rénovation d'une ferme de charpente

La propriété de Pythagore permet d'écrire : $IK^2 = IN^2 + NK^2$; d'où $IK = \sqrt{(6^2 + 3^2)}$; $IK \approx 6{,}71$ m.

1. On peut utiliser deux méthodes :
a. En déterminant l'angle $\hat{E}$ dans le triangle KNE rectangle en N :
$\sin \hat{E} = \frac{KN}{IK}$; $\hat{E} = \sin^{-1}\left(\frac{3}{6{,}71}\right)$ d'où $\hat{E} \approx 26{,}6°$.
Puis dans le triangle RNE : $\sin \hat{E} = \frac{NR}{NE}$ d'où $NR = \sin 26{,}6° \times 6$; $NR \approx 2{,}69$ m.
b. En utilisant l'aire A du triangle rectangle KNE (demi rectangle !) : $A = \frac{NK \times NE}{2}$; $A = 9$. L'aire du triangle KNE est donc de 9 m^2.
NR représente la hauteur de triangle KNE si l'on prend KE comme base.
Ainsi, $A = \frac{KE \times NR}{2}$ d'où $NR = \frac{2 \times 9}{6{,}71}$. On retrouve : $NR \approx 2{,}68$ m.

27 La « pyramide brillante du sud »

1. $\tan 54° = \frac{h}{110}$ d'où $h \approx 151{,}40$ m.
2. On appelle c' le côté de la base de la pyramide d'angle 43°. La propriété de Thalès dans les triangles permet d'écrire : $\frac{c'}{220} = \frac{(151{,}40 - 45)}{151{,}40}$ d'où $c' = 154{,}61$m.
h' est la hauteur de cette pyramide.
$h' = \frac{154{,}61}{2} \times \tan 43°$ d'où $h' \approx 72{,}09$ m.
La hauteur de la « Pyramide brillante du sud » est : $H = h' + 45 = 72{,}09 + 45$ d'où $H = 117{,}09$ m.

28 La chenille

Soit x_1 la hauteur du 1[er] poteau. On a : $\tan 27° = \frac{x_1}{2}$ d'où $x_1 \approx 1{,}019$ m.
Comme tous les poteaux sont parallèles, la propriété de Thales permet de calculer les longueurs des 3 poteaux suivants : $\frac{x_2}{x_1} = \frac{4}{2} = 2$ d'où $x_2 \approx 2{,}030$ m ; $\frac{x_3}{x_1} = \frac{6}{2} = 3$ d'où $x_3 \approx 3{,}057$ m ; $\frac{x_4}{x_1} = \frac{8}{2} = 4$ d'où $x_4 \approx 4{,}076$ m.

29 Angle de tir

1. a. $\tan \widehat{LAC} = \frac{28}{50}$; $\widehat{LAC} = \tan^{-1}\left(\frac{28}{50}\right)$ d'où $\widehat{LAC} \approx 29{,}2°$.
b. $\widehat{SAC} = \tan^{-1}\left(\frac{28 + 5{,}60}{50}\right)$ d'où $\widehat{SAC} \approx 33{,}9°$.
c. $\widehat{SAL} = \widehat{SAC} - \widehat{LAC}$ d'où $\widehat{SAL} \approx 4{,}7°$.
L'angle de tir du buteur positionné en A est d'environ 4,7°.
2. a. Le triangle SML est isocèle, on peut donc travailler sur le triangle IML rectangle en I.
Ainsi $\tan \widehat{SMI} = \frac{IS}{IM}$, $\widehat{SMI} = \tan^{-1}\left(\frac{2{,}8}{50}\right)$ d'où $\widehat{SMI} \approx 3{,}2°$.
b. L'angle de tir du buteur positionné en M est d'environ 6,4° $\left(\widehat{SML} = 2\,\widehat{SMI}\right)$.
Remarque : l'angle de tir est plus ouvert en face des poteaux !

30 Feux de croisement

En supposant (BA) // (ED), on peut utiliser la propriété de Thalès dans les triangles et donc écrire $\frac{CA}{CD} = \frac{AB}{DE}$ d'où $\frac{x}{(x-2)} = \frac{70}{67}$; $67x = 70x - 140$. On obtient $x \approx 46{,}67$. La portée des phares est d'environ 47m.

31 Skier à… 200 %

1. a. Les 2 bâtons de ski forment un triangle isocèle rectangle avec la piste. L'angle d'inclinaison est donc de 45°. Il s'agit d'une pente « raide ».
b. $p = \frac{h}{d} = 1$ soit une pente de 100 %.
2. a. Pour un angle d'inclinaison α de 30°, on obtient : $h = 58$; comme $p = \frac{h}{d} = \frac{58}{100}$ on obtient une pente de 58 %.
b.

α	**30°**	**50°**	**65°**
$\frac{h}{d}$ **: pente**	**58 %**	**119 %**	**214 %**

3. Pour une pente de 200 %, il faut $h = 200$ ce qui correspond à une inclinaison $\alpha \approx 63{,}4$ °.

Démarche d'investigation

32 Terrain de rugby

Les 2 diagonales du terrain doivent être égales et mesurer 119,27 m. Cette valeur est obtenue en utilisant la propriété de Pythagore $\left(\sqrt{(100^2 + 65^2)}\right)$.

33 Table réglable en hauteur

C'est en position basse, pour $h = 38$ cm, que la longueur SE est la plus grande.
Le plateau de la table est normalement horizontal donc $(TA) \mathbin{//} (SE)$.

- La propriété de Thalès dans les triangles permet d'écrire : $\dfrac{h_1}{h_2} = \dfrac{NE}{NT}$.
  Comme $h = 38$ cm (position basse), $h_2 = 38 - h_1$ d'où $\dfrac{h_1}{38 - h_1} = \dfrac{73}{27}$ donc $27\,h_1 = 2\,774 - 73\,h_1$.
  On obtient $h_1 = \dfrac{2\,774}{100}$ soit environ 27,7 cm.
- Le triangle NSE est isocèle et est composé de 2 triangles rectangles. La propriété de Pythagore appliquée à l'un de ces triangles permet d'écrire : $\left(\dfrac{L_1}{2}\right)^2 = NE^2 - h_1^{\,2}$.

Ainsi $L_1 \approx 2\sqrt{(73^2 - 27{,}7^2)}$. On obtient : $L_1 \approx 135{,}1$ cm.
Laureline et David ne doivent pas commander cette table puisque en position basse les pieds de celle-ci dépassent le plateau (135,1 > 120).

34 Récupération

Les élèves pourront chercher à résoudre ce problème :
- soit à l'aide d'un dessin à l'échelle 1/10 ;
- soit en comparant le diamètre D de la nappe ronde avec la diagonale d du rectangle à découper.

On a $d = \sqrt{(90^2 + 65^2)}$ donc $d \approx 111$ cm. Or le diamètre de la nappe est $D = 110$ cm : Tiphaine ne pourra pas découper un rectangle de 65×90 cm dans la nappe ronde.

35 Les lunules d'Hippocrate

- Les aires des 3 demi-disques sont respectivement :

$$D_1 = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{BC}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}\pi BC^2 \;;\; D_2 = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{AC}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}\pi AC^2 \text{ et } D_3 = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}\pi AB^2.$$

- L'aire T du triangle rectangle ABC est $T = \dfrac{AB \times AC}{2}$.
- Or la somme L des aires des 2 lunules est :

$L = D_2 + D_3 - (D_1 - T)$ d'où $L = \dfrac{1}{8}\pi\,(AC^2 + AB^2 - BC^2) + T$.
D'après la propriété de Pythagore appliquée au triangle ABC rectangle en A, $BC^2 = AB^2 + AC^2$ Donc : $L = T$.

10 CALCULS GÉOMÉTRIQUES DANS L'ESPACE

Capacités	Connaissances
• Utiliser les théorèmes et les formules pour : – calculer le volume d'un solide. – déterminer les effets d'un agrandissement ou d'une réduction sur les longueurs, les aires et les volumes.	• Le théorème de Pythagore. • Le théorème de Thalès dans le triangle. • Formule du volume d'un cube, d'un parallélépipède rectangle.

Dans le cadre de la détermination du volume de solides, ce chapitre de géométrie dans l'espace sollicite de nouveau les élèves sur les propriétés de Thalès ou de Pythagore et sur les calculs trigonométriques. Il aborde également les effets d'une réduction ou d'un agrandissement des aires et des volumes.

De manière plus particulière :

– les problèmes 18 et 22 permettent la découverte de différents tétraèdres inscrits dans un cube et l'établissement de l'expression littérale de leur volume ;

– les problèmes 20 et 26 permettent aux élèves d'aborder une méthodologie de détermination de la distance entre deux points situés sur deux aires planes et différentes d'un solide ;

– le problème 25 amène au choix argumenté de la forme conique pour un pluviomètre ; l'étude d'une fonction associée à cette forme à l'aide de GeoGebra permet la détermination des graduations de ce pluviomètre en « mm d'eau de pluie » ;

– le cube perforé du problème 28 (en démarche d'investigation) oblige les élèves à « penser » les vides et les pleins d'un solide complexe ;

– enfin les élèves s'initient au théorème de Guldin (problème 29 en démarche d'investigation) en établissant, par une application simple, l'expression du volume d'un tore.

ACTIVITÉ 1 : L'alarme est-elle adaptée ?

1. Le point D est le plus éloigné de l'alarme.

2. Par le théorème de Pythagore dans le triangle ABE puis dans le triangle AED :

$AE = 14{,}42$ m ;

$AD = 14{,}73$ m.

3. $V = 8 \times 12 \times 3 = 288$ m^3

4. Oui, elle est adaptée, car $V < 300$ m^3 et D est à moins de 15 m.

ACTIVITÉ 2 : Réduction et agrandissement à la photocopieuse

1. $\dfrac{29{,}7}{21} = 1{,}414$; $\dfrac{21}{14{,}8} = 1{,}419$.

2. On trouve quasiment le même résultat et ce résultat est à peu près égal à 141 % ($\approx \sqrt{2}$).

3. $S_{A4} = 21 \times 29{,}7 = 623{,}7$ cm^2 et $S_{A5} = 14{,}8 \times 21 = 310{,}8$ cm^2.

C'est quasiment le double.

4. $\dfrac{14{,}8}{21} = 0{,}705$ et $\dfrac{21}{29{,}7} = 0{,}707$.

Le taux de réduction à appliquer sera de 71 %.

ACTIVITÉ 3 : Armoire en kit

Soit h la hauteur de l'armoire et p sa profondeur : $h = 203$ cm et $p = 58$ cm (la largeur de 120 cm n'intervient pas dans cette problématique).

Soit d la diagonale du rectangle de dimensions 203 cm × 58 cm.

D'après le théorème de Pythagore : $d^2 = 203^2 + 58^2$ soit $d \approx 211{,}1$ cm.

$d \approx 211{,}1$ cm : c'est plus que la hauteur sous plafond de 208 cm.

Une fois montée à plat sur le sol, l'armoire ne pourra pas être relevée !

Travaux pratiques

Récupérateur d'eau de pluie

1. Récupérateur en forme de parallélépipède

b. $V_p = L \times l \times h$. Si la base est un carré de côté a, $a = L = l$ d'où $V_p = a^2h$.

b. $V_p = a^2h = 1$ permet d'obtenir $h = \dfrac{1}{a^2}$.

c. Voir tableau ci-dessous. Pour tous ces modèles, la largeur qui correspond à a est bien inférieure à 1 m.

	Côté a	Hauteur h
Point A	0,82	1,5
	0,86	1,35
	0,91	1,20
Point B	1	1

Remarque : Pour $a = 1$ on obtient un récupérateur cubique.

2. Récupérateur en forme de cylindre

a. $V_c = \pi R^2 h = 1$ d'où $h = \dfrac{1}{\pi R^2}$.

b. Voir tableau ci-dessous.

Rayon R (m)	Hauteur h (m)
0,46	1,5
0,47	1,42
0,48	1,44
0,49	1,34
0,50	1,25

Remarque : Attention : au delà de $R = 0{,}5$ m, la largeur du cylindre est supérieure à 1 m.

Cubage du bois

1. a. et **b.**

Tronc de cône

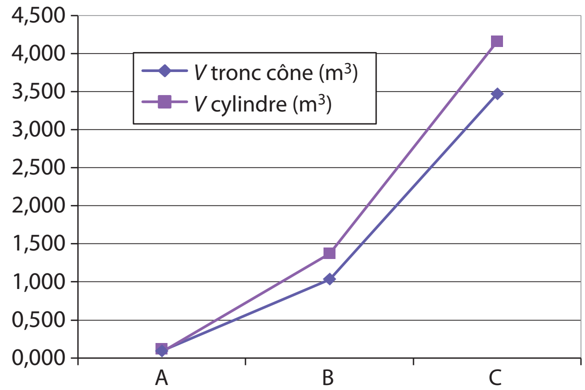
Grume	A	B	C
R_1	0,075	0,2	0,33
R_2	0,055	0,005	0,0045
h	7,000	24,000	30,000
$V_{\text{tronc cône}}$ (m^3)	0,094	1,031	3,468

Formule de Huber

Grume	A	B	C
R_{Me}	0,060	0,135	0,210
h	7,000	24,000	30,000
V_{cylindre} (m^3)	0,079	1,374	4,156

2. a. Plus les dimensions de la grume sont importantes, plus l'écart entre les deux volumes calculés augmente.

b. Le vendeur choisira la formule de Huber qui donne un volume de bois supérieur à celui calculé avec celle du tronc de cône.



Exercices

Application de Thalès et Pythagore dans l'espace

1 **a.** (*PM*) et (*IS*) sont parallèles.
b. $IP = IE - EP$; $IP = 4$ cm.
Comme (*PM*) // (*IS*), la propriété de Thalès dans les triangles permet d'écrire : $\frac{PM}{IS} = \frac{EP}{EI}$;
d'où $PM = \frac{8 \times 10}{12}$; $PM = \frac{20}{3}$ soit $\approx 6{,}7$ cm.

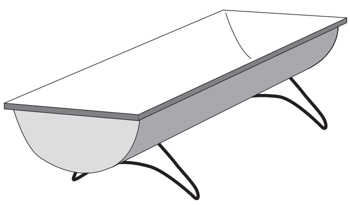
2 **a.** Les plans (*IJK*) et (*AFC*) sont parallèles.
b. Les triangles *BCA*, *BAF* et *BFC* sont isocèles rectangles (3 demi faces carrée du cube).
Le triangle *AFC* est équilatéral (3 côtés égaux à une diagonale du cube).
c. *BAFC* et *BIJK* sont des tétraèdres trirectangles.

3 La propriété de Pythagore appliquée au triangle rectangle *LPA* permet d'écrire $AL^2 = PA^2 + PL^2$ d'où $AL \approx 31{,}6$ cm.
En appliquant la propriété de Pythagore au triangle rectangle *AEL*, on obtient : $EL^2 = AE^2 + AL^2$ d'où $EL \approx 37{,}4$ cm.

4 $\tan \widehat{ALE} = \frac{AE}{AL}$ d'où $\widehat{ALE} \approx \tan^{-1}\left(\frac{20}{31{,}6}\right)$ soit $\widehat{ALE} \approx 32°$.
Remarque : On peut aussi utiliser $\sin \widehat{ALE} = \frac{AE}{EL}$ ou encore $\cos \widehat{ALE} = \frac{AL}{EL}$.

Calcul de volumes

5 **a.** Voir figure ci-dessous.



b. $V_1 = \pi \times \left(\frac{1{,}09}{2}\right)^2 \times 0{,}5$ soit $V_1 \approx 0{,}467$ m³ ;
$V_2 = 1{,}25 \times 0{,}35 \times 0{,}3$ soit $V_2 \approx 0{,}131$ m³ ;
$V_3 = \frac{1}{2} \times \pi \times 0{,}20^2 \times 2$ soit $V_3 \approx 0{,}126$ m³.
c. $V_1 \approx 467$ L ; $V_2 \approx 131$ L ; $V_3 \approx 126$ L

6 **a.** $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$, $V \approx 113$ cm³ soit environ 0,113 L.
b. On peut remplir : $\frac{1}{0{,}113} \approx 8{,}8$ « verres » soit au plus 8 verres pleins.

7 **a.** $R = \frac{P}{2\pi}$ soit $R \approx 6\,366$ km.
b. $V = \frac{4}{3}\pi R^3$; le volume de la Terre est $V \approx 1{,}08\ 10^{12}$ km³.

8 $V = 2\,\frac{a^2 h}{3}$; $V = 2 \times \frac{8^2 \times 6}{3}$ d'où $V = 256$ mm³.
Il faut 256 mm³ d'or blanc pour fabriquer une paire de boucles d'oreilles.

9 **a.** $V_{boule} = \frac{4}{3}\pi R^3$; $V_{boule} = \frac{4}{3}\pi \times 4{,}5^3$ soit $V_{boule} \approx 381{,}704$ cm³.
b. Boîte parallélépipédique : $V_{para} = L \times l \times h$.
Or $L = 3D = 27$ cm (*D* diamètre de la boule) ;
l largeur et profondeur : $l = h = D = 9$ cm.
$V_{para} = 2\,187$ cm³.
c. Boîte cylindrique : $V_{cylindre} = \pi R^2 h$ avec $R = 4{,}5$ cm et $h = 3D = 27$ cm.
$V_{cylindre} = \pi \times 4{,}5^2 \times 27$ soit $V_{cylindre} \approx 1\,717{,}665$ cm³.
Remarque : le rangement dans la boîte cylindrique est plus optimal.

10 **a.** Volume de la partie cylindrique : $V_1 = \pi \times 5^2 \times 125$ d'où $V_1 \approx 9\,817$ mm³.
b. Volume de la partie hémisphérique : $V_2 = \frac{4}{6} \times \pi \times 5^3$ d'où $V_2 \approx 262$ mm³.
c. $V_{total} \approx 10\,079$ mm³ soit environ 10,3 mL. Ce tube à essai *L* ne peut donc recevoir la totalité des 12 mL de liquide.

11 **a.** ① demi-sphère ; ② cylindre ; ③ cône.
b. $V_1 = \frac{2}{3}\pi \times 200^3$ d'où $V_1 \approx 16\,755\,161$ mm³ ;
$V_2 = \pi \times 200^2 \times 180$ d'où $V_2 \approx 22\,619\,467$ mm³ ;
$V_3 = \frac{1}{3}\pi \times 200^2 \times 300$ d'où $V_3 \approx 12\,566\,371$ mm³.
Volume de la balise est $V_{Balise} \approx 51{,}9$ dm³ soit environ 52 L.

12 **a.**

	hauteur	Périmètre de la base
Cylindre n°1	21 cm	29,7 cm
Cylindre n°2	29,7 cm	21 cm

b. Les 2 aires latérales A_1 et A_2 sont identiques : $A_1 = 29{,}7 \times 21$ et $A_2 = 21 \times 29{,}7$.
c. $P_1 = 2\pi R_1 = 29{,}7$ cm d'où $R_1 \approx 4{,}7$ cm.
$P_2 = 2\pi R_2 = 21$ cm d'où $R_2 \approx 3{,}3$ cm.
d. $V_1 = \pi \times 4{,}7^2 \times 21$ d'où $V_1 \approx 1\,457$ cm³ (environ 1,5 L).
$V_2 = \pi \times 3{,}3^2 \times 29{,}7$ d'où $V_2 \approx 1\,016$ cm³ (environ 1 L).
e. Des aires latérales identiques déterminent des cylindres de volume très différent.

Agrandissement et réduction

13 I, J et K sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[BF]$, et $[BC]$ donc $\dfrac{BI}{BA} = \dfrac{BJ}{BF} = \dfrac{BK}{BC} = \dfrac{1}{2}$. $\left(k = \dfrac{1}{2}\right)$.

Pour obtenir l'aire du triangle IJK, il faut donc multiplier celle du triangle AFC par $\dfrac{1}{4}$ $\left(k^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right)$.

14 Le volume du tétraèdre $BAFC$ s'obtient en multipliant celui du tétraèdre $RIJK$ par 8 (en effet : $k' = 2$ donc $k'^2 = 8$).

15 **a.** L'aire de la nouvelle sphère sera multipliée par $(1{,}3)^2 = 1{,}69$. L'aire sera donc augmentée de 69 %.

b. Le volume de cette même sphère sera multipliée par $(1{,}3)^3 \approx 2{,}2$ et sera augmentée d'environ 120 %.

QCM : Testez-vous !

1. B. $V = Llh$.

2. B. $V = a^2h$.

3. B. 25 : si on multiplie l'arête d'un cube par 5, son aire est multipliée par 5^2 c'est-à-dire par 25.

4. C. 125 : si on multiplie l'arête d'un cube par 5, son volume est multiplié par 5^3 c'est-à-dire par 125.

5. B. sa hauteur par 2 : pour diviser le volume d'un cylindre par 2, on divise « sa hauteur par 2 ».

Problèmes

16 Cylindrée d'une Jeep

1. $V_1 = \pi R^2h$ avec $R = \dfrac{\text{alésage}}{2} = 39{,}6875$ mm et $h = 111{,}125$ mm (course du piston).
On obtient $V_1 \approx 549\ 881{,}5\ \text{mm}^3$.

2. Cylindrée totale $V = 4V_1$ d'où $V \approx 2\ 200\ \text{cm}^3$.

3. La cylindrée totale de la Jeep *Willys* est d'environ 2,2 L.

17 Ballon de handball

1. Diamètre minimal : $D_{\text{min}} = \dfrac{580}{\pi}$ d'où $D_{\text{min}} \approx 185$ mm.

Rayon maximal : $D_{\text{max}} = \dfrac{600}{\pi}$ d'où $D_{\text{max}} \approx 191$ mm.

Le diamètre d'un ballon de handball doit être compris entre 185 et 191 mm.

2. a. Le diamètre de la réplique au 1/10 doit être compris entre 18,5 et 19,1 mm.
b. Circonférence de la réplique : $P'_{\text{min}} \approx \dfrac{580}{10}$ soit $P'_{\text{min}} \approx 58$ mm et $P'_{\text{max}} \approx \dfrac{600}{10}$ soit $P'_{\text{max}} \approx 60$ mm.
Le périmètre P' de la réplique est compris entre 58 et 60 mm.
c. Volume V' de la réplique au 1/10 :

– volume minimal : $V'_{\text{min}} = \dfrac{4}{3}\pi R'^3_{\text{min}}$

d'où $V'_{\text{min}} = \dfrac{4}{3} \times \pi \times \left(\dfrac{18{,}5}{2}\right)^3$; $V'_{\text{min}} \approx 3\ 315\ \text{mm}^3$;

– volume maximal : $V'_{max} = \dfrac{4}{3}\pi R'^3_{\text{max}}$

d'où $V'_{max} = \dfrac{4}{3}\pi \times \left(\dfrac{19{,}1}{2}\right)^3$; $V'_{max} \approx 3\ 648\ \text{mm}^3$.

Le volume de la réplique au 1/10 sera compris entre 3 315 et 3648 mm^3.

3. a. Aire du ballon officiel :
$A_{\text{min}} = 4\pi R_{\text{min}}^2$ d'où $A_{\text{min}} = 4\pi \times \left(\dfrac{185}{2}\right)^2$
d'où $A_{\text{min}} \approx 107\ 521\ \text{mm}^3$;
$A_{\text{max}} = 4\pi R_{\text{max}}^2$ d'où $A_{\text{max}} = 4\pi \times \left(\dfrac{191}{2}\right)^2$
d'où $A_{\text{max}} \approx 114\ 608\ \text{mm}^3$.

L'aire du ballon officiel doit être comprise entre 107 521 et 114 608 mm^3.
b. Les diamètres maximum et minimum de la réplique s'obtiennent en multipliant ceux du ballon officiel par $k = \dfrac{1}{10}$.
Les aires de la réplique s'obtiennent donc en multipliant les aires du ballon officiel par $k^2 = \dfrac{1}{100}$:
– l'aire minimale de la réplique est : $A'_{\text{min}} \approx 1\ 075\ \text{mm}^3$;
– l'aire maximale de la réplique $A'_{\text{max}} \approx 1\ 146\ \text{mm}^3$.

Remarque : une vérification peut être faite à l'aide de $R'_{\text{min}} = \left(\dfrac{18{,}5}{2}\right)$ et $R'_{\text{max}} = \left(\dfrac{19{,}1}{2}\right)$.

18 Tétraèdres dans un cube

1. Le triangle ABC a pour aire $\dfrac{a^2}{2}$, et la hauteur de ce tétraèdre est a. $V = \dfrac{B \times h}{3}$ d'où $V = \dfrac{\frac{a^2}{2}}{3} \times a = \dfrac{a^3}{6}$.

2. Le tétraèdre *BIJK* est obtenu en divisant chaque arête par 2. Le rapport de réduction est $k = \frac{1}{2}$.

Son volume est : $V' = k^3 \times V$ d'où $V' = \frac{1}{8} \times \frac{a^3}{6} = \frac{a^3}{48}$.

19 Cube lumineux

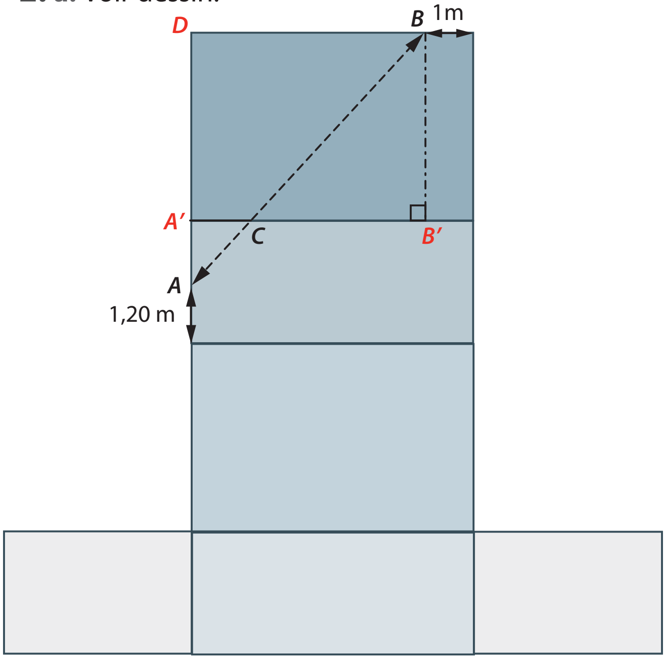
1. Aire de la surface éclairante du cube de 83 cm d'arête : $A = 5a^2$ soit $A = 34\,445$ cm^2.

2. Si l'aire de la surface d'éclairement du cube est augmentée de 50 %, alors : $\frac{A'}{A} = 1{,}5$ où A' est l'aire de la surface du nouveau cube. Or si k est le rapport d'augmentation de l'arête, on a : $\frac{A'}{A} = 1{,}5 = k^2$.
De là, $k = \sqrt{1{,}5} \approx 1{,}22$ puis $a' = k\,a$ d'où $a' \approx 101{,}3$ cm.

3. $A' = 5\,a'$; $A' = 5 \times 101{,}3^2$ d'où $A' \approx 51\,508$ cm^2.
$\frac{A'}{A} = \frac{51\,508}{34\,445} \approx 1{,}5$.

20 Le plus court chemin

1. Voir dessin.
2. a. Voir dessin.



b. Le segment [*AB*] sur le développé.
c. Sur le dessin *AB* = 7,4 cm. Il faut donc prévoir 7,40 m de gaine.
d. Sur le dessin le point *C* se situe à 1,3 cm du coin situé au dessus *A*. Dans la réalité il se trouve à 1,30 m.

3. a. La propriété de Thalès appliquée aux triangles *CA'A* et *CB'B* permet d'écrire : $\frac{CA'}{CB'} = \frac{AA'}{BB'}$,

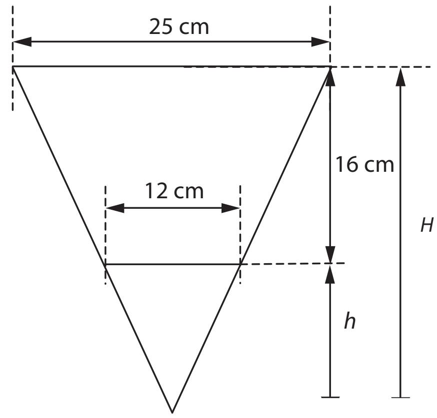
d'où $\frac{x}{(6-1-x)} = \frac{(2{,}60-1{,}20)}{4}$. On obtient $4x = 1{,}4(5-x)$

d'où $x = \frac{7}{5{,}40}$ soit $x \approx 1{,}30$ m.

b. Dans le triangle *ADB*, rectangle en *D*, la propriété de Pythagore permet d'écrire : $AB^2 = DA^2 + DB^2$
d'où $AB = \sqrt{5^2 + 5{,}40^2}$; $AB \approx 7{,}36$ m.

21 Saladier tronconique

1. Voir ci-dessous.



2. La propriété de Thales dans les triangles permet d'écrire :
$\frac{H}{H-16} = \frac{25}{12}$ d'où $12H = 25H - 400$; $H = \frac{400}{13}$;
$H \approx 30{,}8$ cm.

3. Volume *V* du cône complet : $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$;
$V = \frac{1}{3}\pi \times 12{,}5^2 \times 30{,}8$; $V \approx 5\,039{,}2$ cm^3.

4. Volume du cône complémentaire : $V' = \frac{1}{3}\pi R'^2 h$ d'où
$V' = \frac{1}{3}\pi \times 6^2 \times (30{,}8 - 16)$; $V' \approx 557{,}9$ cm^3.
Le volume du saladier correspond à $V - V'$
soit 4 481,3 cm^3 (environ 4,48 L).

22 Autre tétraèdre dans le même cube

1. Les 4 triangles constituant le tétraèdre sont identiques et équilatéraux. En effet, chaque arête est égale à la diagonale du cube.

2. Le volume du cube est $V = a^3$. Le volume d'un « coin » est celui d'un tétraèdre trirectangle (voir 18) et donc $V_1 = \frac{a^3}{6}$. Le tétraèdre régulier restant a donc pour volume $V' = V - 4V_1$ soit $V' = a^3 - \frac{2}{3}a^3$ d'où $V' = \frac{1}{3}a^3$.

23 Le fond du puits

1. $AB = 1{,}61$ m

2. La propriété de Thalès dans les triangles permet d'écrire : $\frac{DE}{BA} = \frac{CD}{CB}$, d'où $DE = \frac{2{,}10}{0{,}8} \times 1{,}61$.
La profondeur du puits est $DE \approx 4{,}22$ m.

24 Tuyau de PVC

1. $V = \pi R_1^2 h - \pi R_2^2 h$ d'où $V = \pi h (R_1^2 - R_2^2)$
soit $V = \pi \times 400\,(11^2 - 9{,}38^2)$; $V \approx 41\,489$ cm^3

ou $V \approx 41{,}5 \cdot 10^{-3}$ m^3.

2. $m = \rho V$; masse minimale d'un tuyau de 4 m :
$m_1 = 1370 \times 41{,}5 \cdot 10^{-3}$ d'où $m_1 \approx 56{,}855$ kg ;
masse maximale : $m_2 = 1460 \times 41{,}5 \cdot 10^{-3}$
d'où $m_2 \approx 60{,}59$ kg.
L'écart maximal de masse est $\Delta m \approx 3{,}7$ kg.

25 Pluviomètre conique

1. a. La propriété de Thalès dans les triangles permet d'écrire : $\frac{R}{6} = \frac{5}{30}$ d'où $R = 1$ cm.

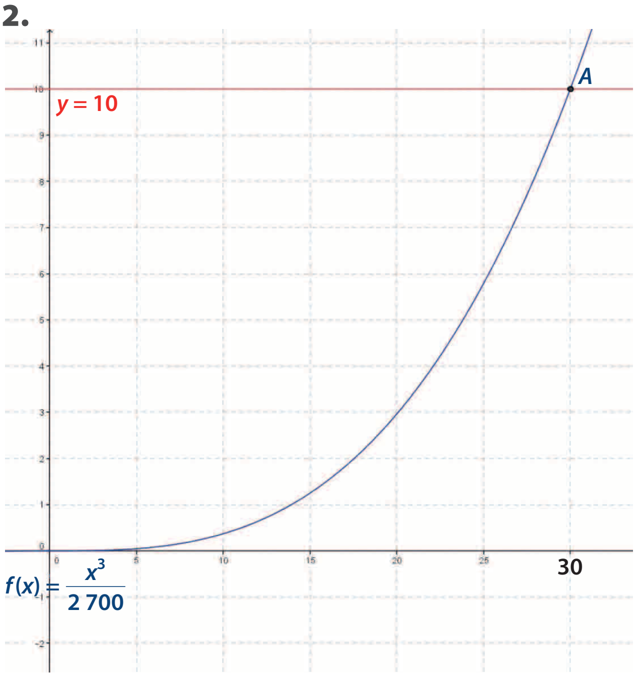
b. $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$ d'où $V \approx 5{,}24$ cm^3.

c. $h' = \frac{V}{\pi R'^2}$ d'où $h' = \frac{5{,}24}{\pi \times 6^2}$ soit $h' \approx 0{,}05$ cm $\left(\frac{1}{2}\text{ mm}\right)$.

d. $h' = \frac{5^3}{27\ 000}$ d'où $h' \approx 0{,}05$ cm.

e. C'est dans le cône que les variations de volume sont les plus visibles ($1 \gg 0{,}05$) :
– dans le cylindre, le volume est proportionnel à la hauteur puisque R^2 est constant ;
– dans le cône inscrit dans le cylindre, pour de faibles volumes la hauteur augmente rapidement puisque le rayon est petit ; comme il existe une relation de proportionnalité (propriété de Thalès) entre la hauteur et le rayon ; le volume du cône est proportionnel au cube de la hauteur.

2.



3. a. La hauteur correspondant à 1 cm de pluie est $h \approx 13{,}9$ cm. (Il s'agit de l'abscisse du point A (13,9 ; 1).)

b.

h (cm) hauteur d'eau dans le pluviomètre										
6,5	8,1	9,3	11,1	12,7	13,9	17,5	23,8	30	37,8	43,3
h'(cm) hauteur de pluie										
0,1	0,2	0,3	0,5	0,75	1	2	5	10	20	30
h' (mm) hauteur de pluie										
1	2	3	5	7,5	10	20	50	100	200	300

c. Non. En effet, une hauteur de 30 cm d'eau correspond à 100 mm de précipitation… ce qui ne se produit normalement pas dans une région tempérée.

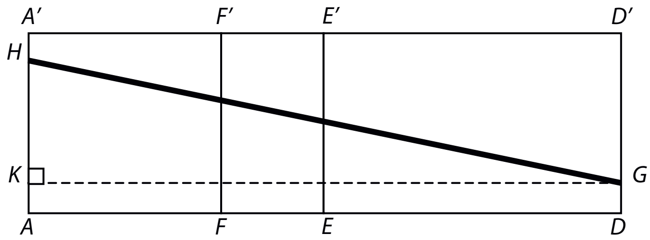
26 Skatepark

1. Distance minimale :
$d = AD = AF + FE + ED = AF + BC + ED$.
La propriété de Pythagore appliquée au triangle ABF permet d'écrire : $AF^2 = BA^2 + BF^2$
d'où $AF = \sqrt{1{,}80^2 + 1{,}20^2}$, ainsi $AF \approx 2{,}16$ m.
De manière analogue, on peut écrire : $ED^2 = CE^2 + CD^2$
d'où $ED = \sqrt{1{,}20^2 + 2{,}5^2}$, on obtient $ED = 2{,}77$ m.
La distance minimale est : $d = 2{,}16 + 1{,}10 + 2{,}77$
d'où $d \approx 6{,}03$ m.

2. $\tan \widehat{CDE} = \frac{EC}{DC}$ d'où $\widehat{CDE} = \tan^{-1}\left(\frac{1{,}20}{2{,}5}\right)$
soit $\widehat{CDE} \approx 26°$.
$\tan \widehat{BAF} = \frac{BF}{BA}$ d'où $\widehat{BAF} = \tan^{-1}\left(\frac{1{,}20}{1{,}8}\right)$ soit $\widehat{BAF} \approx 34°$.

3. La pente correspondant à $\widehat{CDE}$ est tan 26° ou $\frac{EC}{DC} = \left(\frac{1{,}20}{2{,}5}\right)$ soit environ 48 %.
La pente correspondant à $\widehat{BAF}$ est tan 34° ou $\frac{BF}{BA} = \left(\frac{1{,}20}{1{,}8}\right)$ soit environ 67 %.

4. a. Schéma du développé :



b. Le « plus court chemin » entre G et H correspond au segment $[GH]$ sur le développé de la piste de skate.
On observe que $GK = d \approx 6{,}03$ m et $KH = AH - DG$ d'où $KH = 2 - 0{,}60$ soit $KH = 1{,}40$ m.
La propriété de Pythagore appliquée au triangle GKH rectangle en K permet d'écrire :
$GH^2 = KG^2 + KH^2$ d'où $GH = \sqrt{6{,}03^2 + 1{,}40^2}$
soit $GH \approx 6{,}20$ m.
Le plus court chemin entre G et H mesure donc environ 6,20 m.

Démarche d'investigation

27 Plus de monde que prévu

1. Une bouteille de 2 L permet de remplir 10 gobelets (9 élèves + Lillian) jusqu'au trait « 20 cL ».

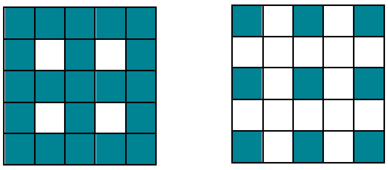
2. Soit $V_{10} = 200$ cm^3, le volume de soda dans un gobelet si 10 élèves sont présents.

Si 2 L sont répartis dans 16 verres (15 élèves + Lillian) chacun des 16 gobelets contiendra alors 12,5 cL :
$V_{16} = 125$ cm^3.
$V_{10} - V_{16} = \pi R^2 h_{10} - \pi R^2 h_{16}$ d'où $\Delta V = \pi R^2 \Delta h$.

$\Delta h = \dfrac{200 - 125}{\pi \times 3{,}5^2}$ d'où $\Delta h \approx 2$ cm.

Pour répartir équitablement les 2 L de soda entre les 16 personnes présentes il faut remplir les gobelets à environ 2 cm en dessous du « trait de 20 cL ».

28 Cube perforé



Le premier schéma représente une vue de dessus du niveau 1 du cube perforé. Ce motif se reproduit aux niveaux 3 et 5.
Le deuxième schéma représente une vue de dessus des niveaux 2 et 4.

a. Dans la première configuration, un niveau comprend 21 (25 – 4) petits cubes « pleins » de 1 dm^3. Le volume des niveaux 1, 3 et 5 est donc $V_{1,3,5} = 63$ dm^3.

Dans la deuxième configuration, un niveau comporte 9 petits cubes « pleins » de 1 dm^3. Le volume des niveaux 2 et 4 est donc $V_{2,4} = 18$ dm^3.

Au total, le cube perforé présente un volume V de 81 dm^3.

b. Le pourcentage d'évidement est $\dfrac{5^3 - 81}{5^3} \times 100$, soit 35,2 % du cube plein.

29 Volume d'un tore

Pour un tore :

– la surface plane en rotation de l'axe est un disque d'aire $A = \pi r^2$;

– le centre de gravité du disque décrit un cercle de rayon R, donc $P = 2\pi R$.

Le volume V du tore est $V = P \times A$ d'où $V = 2\pi R \times \pi r^2$.
On obtient : $V = 2\pi^2 R r^2$.

SÉQUENCES D'ÉVALUATION

Séquence 1 : LES JEUNES ET LA RADIO

1. a. La représentation graphique est un diagramme en bâtons avec :
- en abscisses : le nombre de postes de radios écoutés qui est un caractère quantitatif discret ;
- en ordonnées : le nombre de lycéens.

b.

Nombre de récepteurs radio	1	2	3	4	5
Nombre de jeunes	81	162	183	54	12

Valeur minimale du caractère : 1 récepteur radio.

Valeur maximale du caractère : 5 récepteurs radio.

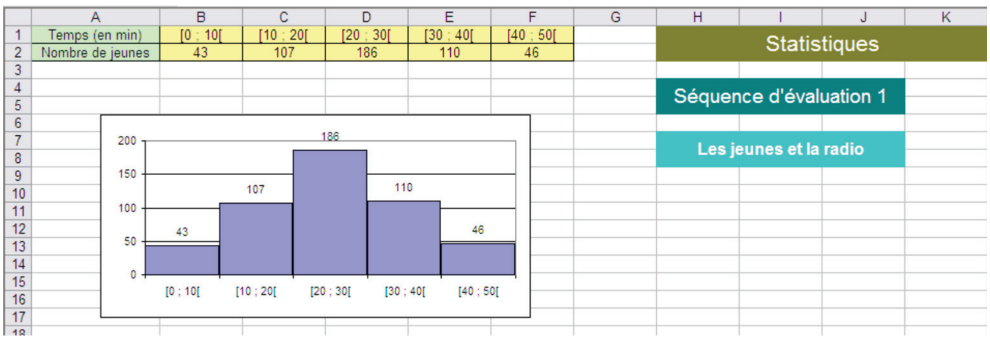
Étendue de la série : $e = 5 - 1 = 4$ récepteurs radio.

Moyenne de la série : $\overline{x} = \dfrac{81 \times 1 + 162 \times 2 + 183 \times 3 + 54 \times 4 + 12 \times 5}{81 + 162 + 183 + 54 + 12} = \dfrac{1230}{492} = 2{,}5$ postes de radios.

Médiane de la série : $\dfrac{N}{2} = \dfrac{492}{2} = 246$ et $81 + 162 < 246$, donc $Me = 3$.

$\overline{x} < Me$: on peut dire que :
- plus de 50 % des jeunes écoutent régulièrement un nombre de récepteurs radios supérieur à la moyenne ;
- moins de 50 % des jeunes écoutent régulièrement un nombre de récepteurs radios inférieur à la moyenne.

2.



3. Première enquête :

La distribution n'est pas symétrique. La plus grande partie des jeunes écoute au plus 3 radios.

Le nombre de jeunes qui écoutent 2 radios est peu différent de ceux écoutant 3 radios. Peu de jeunes écoutent 5 radios. Les effectifs des valeurs du caractère inférieures à *Me* sont plus dispersés que ceux des valeurs supérieures, ce qui explique que la moyenne et la médiane sont différentes.

Deuxième enquête :

L'histogramme présente un axe de symétrie : les effectifs sont donc régulièrement répartis autour de la moyenne et la médiane qui sont peu différentes et appartiennent à l'intervalle [20 ; 30[.

Plus du tiers (≈ 38 %) des jeunes écoutent la radio entre 20 et 30 minutes.

Séquence 2 : QUELLE CHANCE DE TROUVER DE L'EAU ?

1. a. Effectif minimale : 0 réussite.
Effectif maximal : 7 réussites.
Étendue de la série : $e = 7 - 0 = 7$ réussites.

b. Pour calculer la moyenne de la série :

$$\overline{x} = \frac{2+4+1+7+3+5+5+3+2+1+5+5+0+1+1+3}{16} = \frac{48}{16} = 3 \text{ réussites.}$$

Pour calculer la médiane de la série :

- $\frac{N}{2} = \frac{16}{2} = 8.$
- Série rangée par ordre croissant : 0 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 2 ; 2 ; 3 ; 3 ; 3 ; 4 ; 5 ; 5 ; 5 ; 5 ; 7
- $Me = \frac{3+3}{2} = 3$ réussites.

Remarque : $\overline{x}$ et *Me* peuvent aussi être déterminés avec une calculatrice graphique.

c. On a $\overline{x} = Me$.
Dans 50 % des expériences, le sourcier a un nombre de réussites égal ou inférieur à la moyenne.
De même, dans 50 % des expériences, le sourcier a un nombre de réussites égal ou supérieur à la moyenne.

d. $16 \times 0{,}25 = 4$ donc $Q_1 = 1$ réussite.
$16 \times 0{,}75 = 12$ donc $Q_3 = 5$ réussites.

2. Effectif minimal : 0 réussite.
Effectif maximal : 5 – 0 = 5 réussites.

3.

Indicateurs	$\overline{x}$	e	Q_1	Me	Q_3
1er sourcier	3	7	1	3	5
2nd sourcier	2	5	0	1,5	4

Tous les indicateurs du premier sourcier sont supérieurs à ceux du second : il a donc plus souvent réussi.

4. a. $p = \frac{1}{5} = 0{,}2$ soit 20 %.

b.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1
3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
4	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0
5	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
6	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
7	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1
8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
10	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
11	**1**	**2**	**1**	**2**	**2**	**1**	**1**	**1**	**3**	**1**	**2**	**0**	**4**	**2**	**2**	**7**
12																
13																
14		Effectif minimal			**0**			Effectif maximal			**7**					

Statistiques
Séquence d'évaluation 2
Quelle chance de trouver de l'eau ?

Effectif minimal : 0.
Effectif maximal : 7.

5. La simulation informatique donne des valeurs aléatoires comprises entre 0 et 7. Les sourciers ont obtenu des résultats dans cet intervalle de valeurs : leurs résultats peuvent donc être dus au hasard.

Séquence 3 : CALCUL D'UN PRIX DE VENTE

Sur l'édition 01, une coquille s'est glissée dans l'énoncé ; il faut lire :
8 boîtes de 500 vis de 4×20 ;
10 boîtes … de 4×40 ;
12 boîtes … de 12×60…
Et modifier l'équation centrale de la question **3. a.** par $8\boldsymbol{x} + 20\boldsymbol{x} + 36\boldsymbol{x} = 375$.

1. a. Prix de vente moyen d'une boîte de vis : 375/30 = 12,50 €.

b. Exemple de réponse possible de la part d'un élève :
Non car les vis 4×60 sont plus « grosses » que les vis 4×20.

2. a. Prix de vente d'une boîte de vis courtes : 12,50 € – 5 € = 7,50 €.
Prix de vente d'une boîte de vis moyennes : 12,50 €.
Prix de vente d'une boîte de vis longues : 12,50 € + 5 € = 17,50 €.
Non, ces prix ne sont pas en accord avec les données du problème car $7{,}50 \times 8 + 12{,}50 \times 10 + 17{,}50 \times 12 = 395$ € et non 375 €.

b. Voir le travail proposé par l'élève.

3. a. La mise en équation du problème correspond à : $8x + 20x + 36x = 375$.

b. $8x + 20x + 36x = 375 \Leftrightarrow x = 5{,}86$ à 0,01 près.
On peut donc déterminer les prix suivants :
- prix de vente d'une boîte de vis courtes : 5,86 € ;
- prix de vente d'une boîte de vis moyennes : $2 \times 5{,}86$ € = 11,72 € ;
- prix de vente d'une boîte de vis longues : $3 \times 5{,}86$ € = 17,58 €.

Séquence 4 : S'ÉQUIPER POUR LE CAMPING

1. a. On a bien 232 – 219,5 = 12,50 €.
b. À partir du deuxième lot, on peut écrire que 3 tables modèle métal vont coûter 232 + 12,5 soit 244,5.
Une table modèle métal coûte 244,5/3 = 81,5 € alors que le modèle bois coûte 81,5 – 12,5 soit 69 €.

2. a. Résolution de l'équation à une inconnue : $x + 2(x + 12{,}5) = 232 \Leftrightarrow 3x = 207 \Leftrightarrow x = 69$.
La résolution du système donne $x = 69$ et $y = 81{,}5$
b. Le prix d'une table modèle bois est 69 € et celui d'un modèle métal 81,50 €.

3. Extrait du tableau :

68,00 €	80,50 €	216,50 €	229,00 €
68,50 €	81,00 €	218,00 €	230,50 €
69,00 €	81,50 €	219,50 €	232,00 €
69,50 €	82,00 €	221,00 €	233,50 €

4. On peut donc lire dans le tableau que les prix sont 69,00 € et 81,50 €.

5. Ces prix ne sont pas en désaccord avec ce que l'on a trouvé précédemment.

Séquence 5 : DISTANCE D'ARRÊT D'UN VÉHICULE

1. L'élève peut proposer un calcul de moyenne ou une représentation graphique du nuage de points faisant apparaître une répartition des valeurs autour de 77.

2. En utilisant une calculatrice :

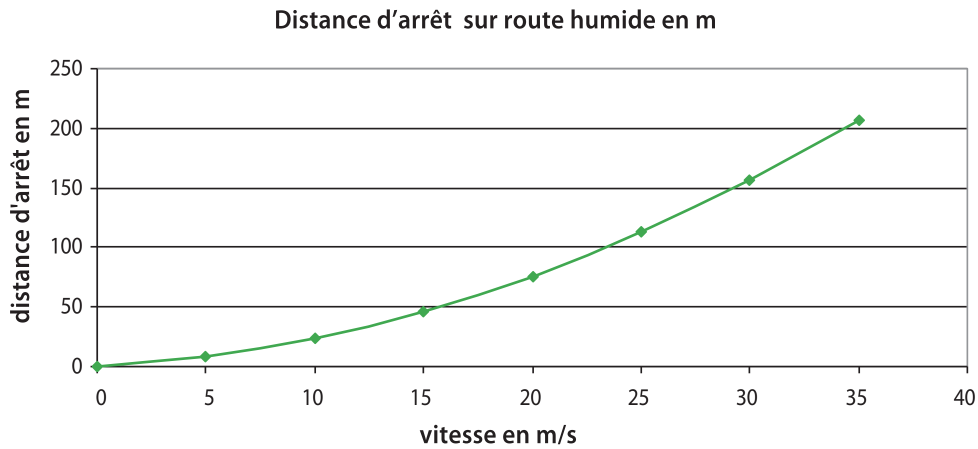
```
1-Variable
x̄     =77
Σx    =1232
Σx²   =94922.5
xσn   =1.91213231
xσn-1 =1.97484176
n     =16          ↓
```

La moyenne de 77 m est confirmée.

3. Valeur arrondies au centimètre.

Vitesse en km/h	30	50	90	110	130
x en m/s	8,33	13,89	25,00	30,56	36,11
f(*x*) en m	14	30	77	108	144,5

4. Représentation graphique de la fonction *g* sur l'intervalle [0 ; 35]



5. Les élèves peuvent proposer une méthode graphique ou chercher à obtenir l'équation de la courbe de tendance pour comparer les distances d'arrêt sur route sèche à 130 km/h et 110 km/h sur route humide.

6. À 130 km/h sur route sèche, la distance d'arrêt est environ de 144,5 m.
Cette distance d'arrêt correspond à une vitesse de 28,8 m/s environ sur route humide, soit 104 km/h.
À 110 km/h, c'est-à-dire 30,5 m/s environ, la distance d'arrêt sur route humide est supérieure à 161 m.

7. Il paraît donc tout à fait nécessaire de limiter la vitesse à 110 km/h. Cette vitesse autorisée est même un peu élevée relativement à la limitation sur route sèche.

Séquence 6 : ÉVOLUTIONS DU PRIX DU PÉTROLE

1. La valeur du baril selon le modèle correspondant à la fonction g en 2030 serait $g(30) = 200$ $.

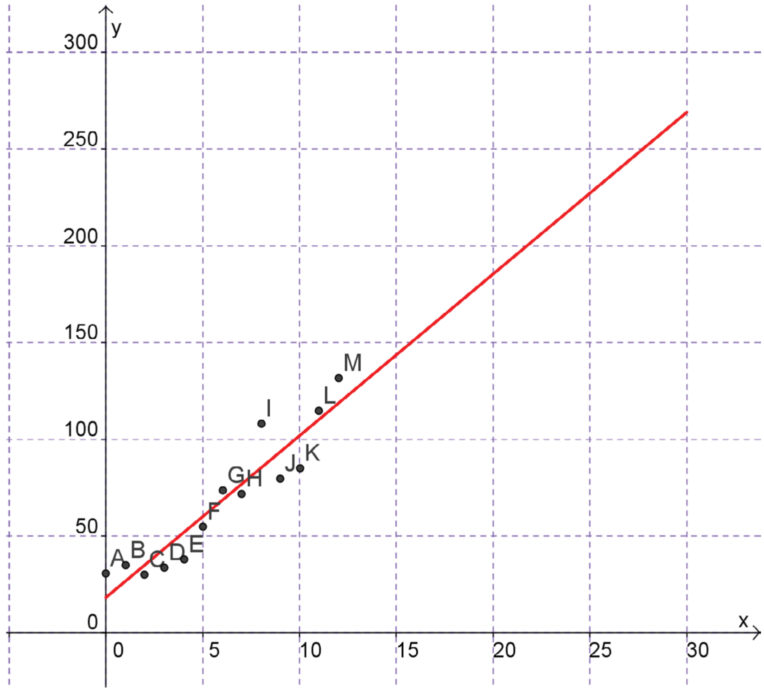
2. $h(30) = 85$. Cette valeur correspond au prix du baril de pétrole brut estimé par l'organisme C en 2030.

3. Prix du baril que donnerait le modèle choisi par l'organisme A en 2030 :

$$f(30) = 8{,}36 \times 30 + 18{,}24 = 269{,}04 \text{ \$}.$$

4. Seul l'organisme C considère que le prix du baril n'est pas en constante augmentation puisque seule la fonction h n'est pas strictement croissante.

5. L'élève propose une méthode utilisant le logiciel GeoGebra, permettant d'apprécier la validité du modèle A. Il peut, pour cela, placer les points et tracer la fonction grâce au logiciel.



6. Toute justification argumentée visant à confirmer ou infirmer le choix du modèle choisi par l'organisme A peut être acceptée.

7. L'élève peut proposer au choix une méthode graphique (TIC ou non) ou la résolution d'une inéquation.

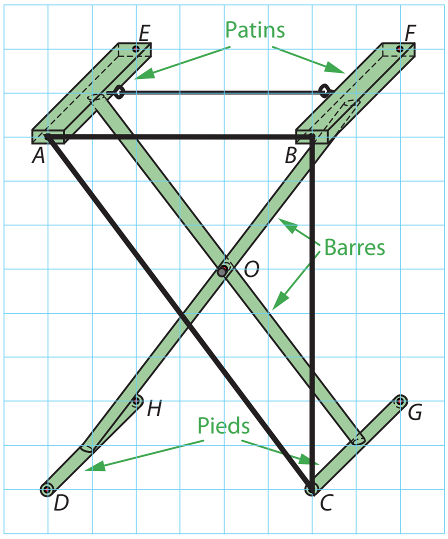
8. L'année où le prix du baril dépassera la valeur de 200 $ selon le modèle établi par l'organisme A est 2022.

9. $f(21) = 193{,}8$ $ et $f(22) = 202{,}16$ $.

Séquence 7 : LE SUPPORT DE PIANO

1. Sur le dessin en perspective cavalière :
- *ABCD* et *EFGH* sont des rectangles ;
- (*AE*) // (*BF*) // (*CG*) // (*DH*) ;
- $\widehat{EAB} = 45°$.

ABCDEFGH est donc un parallélépipède rectangle.



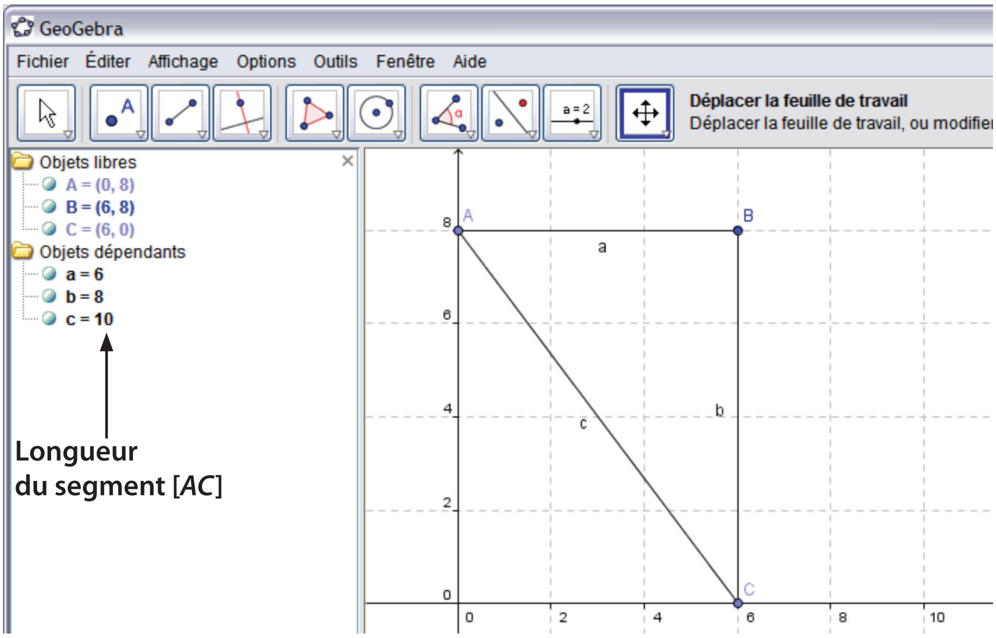
2. Solides usuels : 2 parallélépipèdes rectangles et 4 cylindres.
Figures planes : 12 rectangles et 4 disques.

3. a. Voir schéma ci-dessus à droite

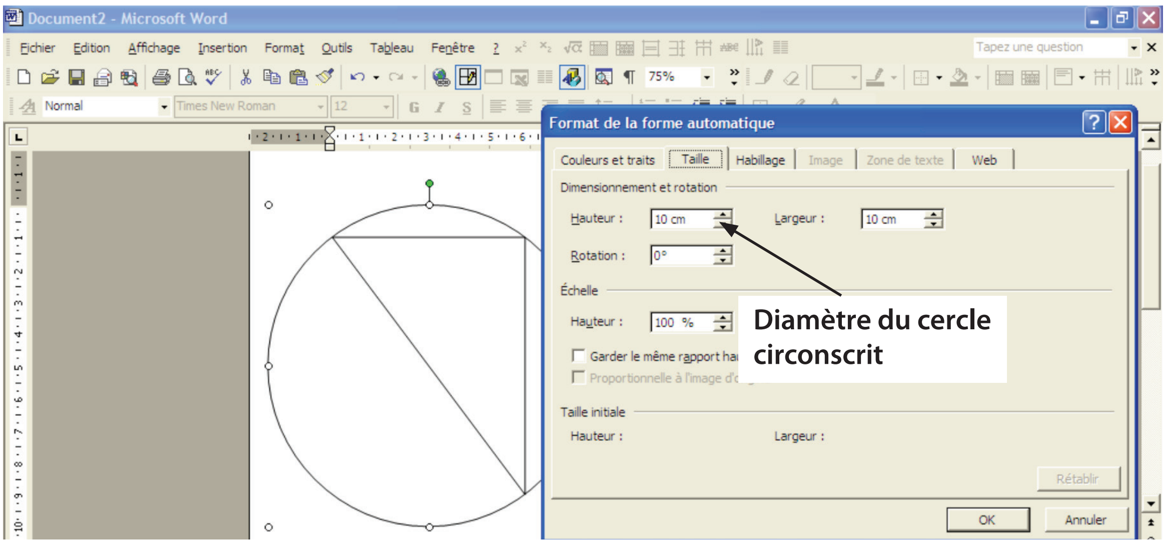
b. *ABC* est un triangle rectangle en *B* car *ABCD* est un rectangle dont *AC* est une diagonale.

4. Théorème de Pythagore :
$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow AC^2 = 60^2 + 80^2 \Rightarrow AC^2 = 3\,600 + 6\,400 \Rightarrow AC^2 = 10\,000$
Donc $AC = \sqrt{10\ 000} = 100$ cm

5. Avec GeoGebra :



Avec Word :



Séquence **8 : COMMENT DÉTERMINER LES GRADUATIONS D'UNE JAUGE ?**

1. Fût de 220 L

a. πR^2 est l'expression de l'aire d'un disque ; $V = \pi R^2 h$ avec $V = 0{,}220\ \text{m}^3$ d'où $h = \dfrac{0,220}{\pi\left(\dfrac{0,584}{2}\right)^2}$
d'où $h \approx 0{,}821$ m.

b. La hauteur du fût de 220 L est de 82,1 cm.

c. La distance entre deux graduations de « 20 L » correspond à la hauteur h' d'un cylindre de volume $V' = 0{,}020\ \text{m}^3$: $h' = \dfrac{0,020}{\pi\left(\dfrac{0,584}{2}\right)^2}$ d'où $h' \approx 0{,}075$ m.

La distance entre deux graduations de « 20 L » est d'environ 7,5 cm.

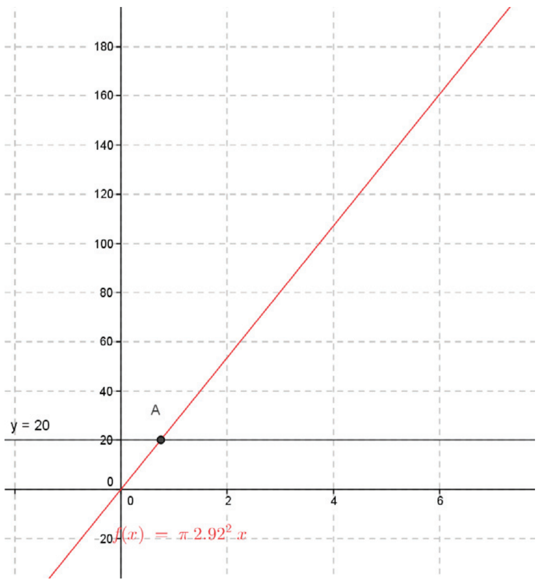
On peut également remarquer la proportionnalité entre volume et hauteur d'un cylindre de même diamètre (ou rayon) : $h' = \dfrac{20}{220} \times 82,1$ d'où $h' \approx 0{,}075$ m.

2. a. Voir ci-contre.

b. La représentation graphique obtenue est une droite passant par l'origine du repère. La fonction *f* représentée est une fonction linéaire ; *f*(*x*) est de la forme « *ax* » avec $a = \pi \times 2{,}92^2$.

c. Voir ci-contre.

Par lecture du graphique pour l'équation *f*(*x*) = 20 on obtient $x = 0{,}75$.



3. a. *f*(*x*) représente le volume du fût de diamètre 58,4 m (soit 2,92 dm de rayon) ; *x* est la hauteur de ce volume.

Le problème correspond à la résolution de l'équation : *f*(*x*) = 220.

b. Par lecture du graphique, on obtient : 8,21.
Ceci correspond à une hauteur d'environ 82,1 cm comme celle obtenue par calcul à la question **1. b.**

V, volume (L)	0	20	40	60	100	140	200	220
h, hauteur (dm)	**0**	**0,75**	**1,49**	**2,24**	**3,73**	**5,23**	**7,47**	**8,21**

4. Fût de 110 L

a. Pour obtenir un fut cylindrique de même diamètre mais dont le volume est divisé par 2, il suffit de diviser sa hauteur par 2. Le fût de 110 L a donc une hauteur d'environ 41,05 cm.

Pour vérifier ce résultat on peut :

- utiliser la représentation graphique de *f* pour résoudre *f*(*x*) = 110 ; on trouve $x = 4{,}11$: ceci correspond bien à environ 41, 05 cm ;
- on peut aussi calculer la hauteur h'' pour $V'' = 0{,}110\ \text{m}^3$; $h'' = \dfrac{0,110}{\pi\left(\dfrac{0,584}{2}\right)^2}\pi$ d'où $h'' \approx 0{,}411$ m.

b. En utilisant l'expression du volume d'un cylindre, pour un volume de 110 L et une hauteur de 0,82 m, on obtient pour rayon R''' : $R''' = \sqrt{\dfrac{0,110}{\pi \times 0,82}}$; d'où $R''' \approx 0{,}207$.

Le diamètre d'un fût de 110 L et de hauteur 82 cm a un diamètre d'environ 41,4 cm.

Pour vérifier ce résultat, on peut recalculer le volume d'un cylindre de 41,4 cm de diamètre et de hauteur 82 cm : $V''' = \pi \times 0{,}207^2 \times 0{,}82$. On obtient : $V''' = 0{,}110\ \text{m}^3$.

c. • Si le diamètre reste le même (58,4 cm), la distance entre deux traits de jauge correspondant à 20 L reste la même : $h_1' = \dfrac{0,020}{\pi\left(\dfrac{0,584}{2}\right)^2}$ d'où $h_1' \approx 0,075$ m (résultat obtenu à la question 1.c.).

• Si la hauteur reste la même et que le diamètre change (environ 41,4 cm), alors la distance entre deux traits de jauge est doublée par rapport à la situation précédente : $h_2' = \dfrac{0,020}{\pi\left(\dfrac{0,414}{2}\right)^2}$ soit environ 14,9 cm.

Séquence 9 : LES CUBES D'UNE CASCADE DE JARDIN

1. a. Non : lorsqu'une dimension d'une figure est multipliée par un nombre k (ici l'arête du cube n°1 est multipliée par $\frac{1}{2}$), son volume est multiplié par k^3 (ici $\frac{1}{8}$). On peut conclure que $V_2 \neq \frac{V_1}{2}$.

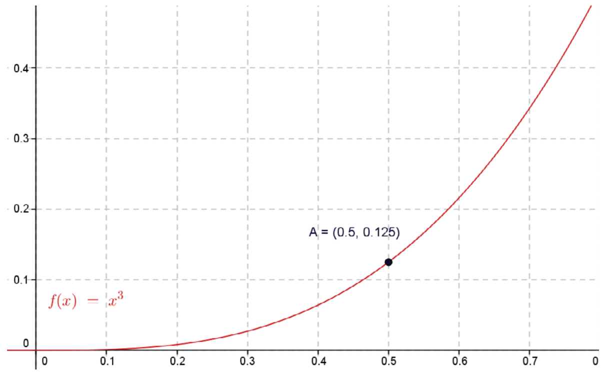
- Le volume du cube n°2 est 8 fois plus petit que celui du cube n°1.
- On peut aussi rechercher le volume du cube n°2 à partir de son arête. L'arête du cube n°1 de volume $V_1 = 1$ m^3 est $a_1 = 1$ m ; celle du cube n°2 est donc $a_2 = 0,5$ m ; d'où $V_2 = 0,125$ m^3. On peut conclure que $V_2 \neq \frac{V_1}{2}$.

b. $V_2 = \dfrac{V_1}{8}$.

c. De manière similaire, comme $a_3 = \dfrac{a_2}{2}$, $V_3 = \dfrac{V_2}{8}$.

On obtient : $V_3 = 0,015\,652\,5$ m^3.

2. a. Voir graphique ci-contre.



b. Variation de f

x	0	1
f	0 ↗	1

c. La fonction f modélise la relation entre le volume d'un cube et la mesure de son arête.

x correspond à l'arête du cube et $f(x) = x^3$ au volume de celui-ci.

Sur le graphique, pour $x = 0,25$, on lit $f(x) = 0,016$; ce qui correspond au résultat de la question **1. c.**

3. a.

	Cube n°1	Cube n°2	Cube n°3
Arête (m)	1	0,500	0,250
Volume (m^3)	1	0,125	0,015625
Capacité (L)	1000	125	15,625

b. On retrouve les valeurs respectives des volumes des cubes n°2 et n°3 déterminés aux questions **1. b** et **1. c.**

4. Soit $V = V_1 + V_2 + V_3$ le volume total à remplir avant la mise en fonctionnement du système de circulation d'eau de la cascade. On trouve $V \approx 1,141$ m^3 soit environ 1 141 L.

Il faut donc 22,82 min $\left(\dfrac{1\,141}{50} \approx 22,82\right)$, soit environ 22 min et 49 s, pour remplir les trois cubes avec une pompe débitant 50 L/min.